Concours commun Mines-Ponts, France

# Session 2010, filière PSI

## Mathématiques 2

Durée : 3 heures

### Ce que traite le sujet

- Partie I : préliminaires
- Partie II : formule de condensation
- Partie III : algorithme de Lewis Carroll
- Partie IV : le lambda-déterminant

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/psi/2010/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

**A 2010 MATH II PSI**

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PSI).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2010

# SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**Filière PSI**

**(Durée de l'épreuve : trois heures)**
**Sujet mis à la disposition des concours :**
**Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.**

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :*

*MATHÉMATIQUES II - PSI*

*L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

# Déterminants et formule de condensation.

Le but de ce problème est de montrer la formule dite de condensation sur les déterminants et d'en explorer les applications et généralisations.

## Notations

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 1 et $M$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels). On dira aussi que $M$ est une matrice de taille $n \times n$.

• On note $M_{i,j}$ le coefficient de $M$ qui se trouve sur la $i$-ème ligne et $j$-ème colonne.

• On note ${}^tM$ sa transposée définie par ${}^tM_{i,j} = M_{j,i}$ pour tout $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

• On note $\det M$ son déterminant.

• Pour $n \geq 2$ et $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, on note $[M]_i^j$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de $M$ en enlevant la $i$-ème ligne et la $j$-ème colonne.

• Plus généralement, soit $r \geq 0$.

Pour $n \geq r+1$ et $i_1, ..., i_r, j_1, ..., j_r \in \{1, 2, ..., n\}$, vérifiant $i_k \neq i_l$ et $j_k \neq j_l$ si $k \neq l$, on note $[M]_{i_1,...,i_r}^{j_1,...,j_r}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de $M$ en enlevant les lignes d'indices $i_1, ..., i_r$ et les colonnes d'indices $j_1, ..., j_r$. On conviendra que cette matrice vaut $M$ si $r = 0$.

• On note $\mathrm{Com}M$ la comatrice de $M$ définie par

$$(\mathrm{Com}M)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det [M]_i^j$$

• On désignera par $I_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $e = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$.

## I. Préliminaires.

**1** - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul. Montrer que l'application $N$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ N(M) = \sup_{i,j \in \{1,...,n\}} |M_{i,j}|,$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans le cas où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas inversible, on rappelle qu'il existe deux matrices inversibles $P$ et $Q$ (de tailles $n \times n$) telles que $M = P.J.Q$ où

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & . & & & & \\ & & . & & (0) & \\ & & & 1 & & \\ & & (0) & & 0 & \\ & & & & & . \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$J$ étant une matrice *diagonale* dont les $r$ premiers éléments *diagonaux* valent 1 et dont les $n-r$ derniers éléments diagonaux valent 0. Si $J=0$ on convient que $r=0$.

**2** Rappeler l'interprétation de $r$.

**3** - On conserve les notations de la question précédente. Montrer qu'il existe une suite de matrices inversibles $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M=\lim_{k\to+\infty} P.J_k.Q$ au sens de la distance associée à la norme $N$.

**4** - Montrer que le déterminant définit une fonction continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni de la distance associée à la norme $N$, dans $\mathbb{R}$ (on pourra écrire le déterminant comme une somme de fonctions toutes en forme de produits).

## II. Formule de condensation

On se propose de montrer dans cette partie la formule de Desnanot-Jacobi, dite de *condensation*, suivante où $n$ est un entier $\geq 3$ :

$\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\det M \det[M]^{1,n}_{1,n} = \det[M]^1_1 \det[M]^n_n - \det[M]^1_n \det[M]^n_1 \qquad (1)$$

**5** - Soit $i\in\{1,2,...,n\}$. Calculer

$$M_{i,1}\det[M]^1_i - M_{i,2}\det[M]^2_i + ... + (-1)^{n-1}M_{i,n}\det[M]^n_i$$

en fonction de $\det M$ et de $i$.

**6** - Montrer que

$$M_{j,1}\det[M]^1_i - M_{j,2}\det[M]^2_i + ... + (-1)^{n-1}M_{j,n}\det[M]^n_i = 0$$

pour $i,j\in\{1,2,...,n\}$, vérifiant $i\neq j$ (on interprètera le membre de gauche comme le développement par rapport à une ligne du déterminant d'une certaine matrice).

**7** - *Déduire des deux questions précédentes* le fait que $M\,.\,{}^t(\mathrm{Com}M) = xI_n$ où $x$ est un nombre réel que l'on précisera.

On introduit la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$M^\star = \begin{pmatrix} \det[M]^1_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & (-1)^{n+1}\det[M]^1_n \\ -\det[M]^2_1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & (-1)^{n+2}\det[M]^2_n \\ \det[M]^3_1 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & (-1)^{n+3}\det[M]^3_n \\ . & . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & & . & & . & . \\ . & . & . & & & . & . & . \\ (-1)^n\det[M]^{n-1}_1 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & -\det[M]^{n-1}_n \\ (-1)^{n+1}\det[M]^n_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \det[M]^n_n \end{pmatrix}$$

Autrement dit, $M^\star$ est obtenue à partir de ${}^t(\mathrm{Com}M)$ en remplaçant, pour chaque $i \in \{1,\dots,n\}$ et chaque $j \in \{2,\dots,n-1\}$ le coefficient ${}^t(\mathrm{Com}M)_{i,j}$ par 0 si $i \neq j$ et par 1 si $i = j$.

**8** - Calculer $\det M^\star$ en fonction de $\det[M]_1^1, \det[M]_n^n, \det[M]_n^1, \det[M]_1^n$.

**9** - Ecrire le calcul explicite de la matrice produit $M \,.\, M^\star$ sous la forme du tableau usuel de taille $n \times n$.

**10** - En utilisant la question précédente, démontrer (1) dans le cas où $M$ est inversible.

**11** - Démontrer (1) dans le cas où $M$ n'est pas inversible.

## III. Algorithme de Lewis Carroll

Le Révérend Charles L. Dodgson, plus connu sous son nom de plume, Lewis Carroll, s'est servi de la formule de condensation (1) pour mettre au point un algorithme de calcul de déterminant $n \times n$, n'utilisant que le calcul de déterminants $2 \times 2$.

L'algorithme fonctionne comme suit.

On doit trouver le déterminant d'une matrice $M$ de taille $n \times n$.

Pour cela, on met en jeu une suite de couples de matrices $(A^{(k)}, B^{(k)}) \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-k-1}(\mathbb{R})$ pour $k = 0, ..., n-2$ définies comme suit.

Pour $k = 0$, $A^{(0)} = M$ et $B^{(0)}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Voici comment l'on passe du couple $(A^{(k)}, B^{(k)})$ $(k \leq n-3)$ au couple $(A^{(k+1)}, B^{(k+1)})$.

Si aucun des coefficients de $B^{(k)}$ n'est nul, (ce qui est le cas pour $B^{(0)}$) alors on pose,

$$A_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{B_{i,j}^{(k)}} \times \begin{vmatrix} A_{i,j}^{(k)} & A_{i,j+1}^{(k)} \\ A_{i+1,j}^{(k)} & A_{i+1,j+1}^{(k)} \end{vmatrix}, \quad i,j \in \{1,\dots,n-k-1\}$$

$$B_{i,j}^{(k+1)} = A_{i+1,j+1}^{(k)}, \quad i,j \in \{1,\dots,n-k-2\}.$$

Bien entendu, dans le membre de droite qui définit le terme $A_{i,j}^{(k+1)}$, $|\,|$ désigne un déterminant $2\times2$. Enfin, si $(A^{(n-2)}, B^{(n-2)})$ a pu être défini par la précédente procédure, alors on définit la matrice de taille $1 \times 1$, $A^{(n-1)} = (A_{1,1}^{(n-1)})$ par :

$$A_{1,1}^{(n-1)} = \frac{1}{B_{1,1}^{(n-2)}} \times \begin{vmatrix} A_{1,1}^{(n-2)} & A_{1,1+1}^{(n-2)} \\ A_{1+1,1}^{(n-2)} & A_{1+1,1+1}^{(n-2)} \end{vmatrix}.$$

Noter qu'il *n'y a pas* de terme $B^{(n-1)}$. L'algorithme se termine en affirmant que $A_{1,1}^{(n-1)} = \det M$, on prouvera plus loin sa validité. Si l'un des coefficients de $B^{(k)}$ est nul, l'algorithme ne s'applique pas, et Lewis Carroll préconise de recommencer après avoir échangé (convenablement) des lignes dans la matrice initiale.

Exemple :

$$M = A^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 11 \end{pmatrix} \qquad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 38 \end{pmatrix} \qquad B^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 77 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de $M$ vaut donc 77.

**12** - Appliquer cet algorithme au calcul du déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**13** - Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que l'algorithme se termine sans qu'aucun des coefficients des matrices $B^{(i)}$ ne s'annule. Quel est le nombre $u_n$ de déterminants $2 \times 2$ que l'on a calculé au cours de la procédure ?

Une autre méthode de calcul de déterminant consiste à répéter le développement suivant des lignes par cofacteurs jusqu'à ce qu'on obtienne des déterminants $2 \times 2$. L'objet de la question suivante est d'étudier le nombre $v_n$ de déterminants $2 \times 2$ ainsi obtenus.

**14** - Soit donc $v_n$ le nombre de déterminants $2 \times 2$ calculés lorsque l'on applique la méthode de développements successifs par rapport à des lignes pour calculer le déterminant d'une matrice de taille $n \times n$. Etablir une relation entre $v_n$ et $v_{n-1}$. Puis, comparer $u_n$ et $v_n$ lorsque $n \to +\infty$.

*On se place désormais dans le cas où l'algorithme de Lewis Carroll s'applique. On se propose de montrer sa validité.*

**15** - Soit $r, s \in \{1, 2, ..., n-2\}$. En appliquant la formule de condensation, montrer que $A^{(2)}_{r,s}$ est le déterminant d'une matrice $3 \times 3$, extraite de $M$, que l'on précisera.

**16** - Soit $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ et $r, s \in \{1, 2, ..., n-k\}$.

Généraliser le résultat précédent en exprimant $A^{(k)}_{r,s}$ comme le déterminant d'une matrice de taille $(k+1, k+1)$ extraite de $M$ que l'on précisera. Prouver que

$$A^{(n-1)}_{1,1} = \det M$$

ce qui établit la validité de l'algorithme.

## IV. Le $\lambda$-déterminant

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On introduit la notion de $\lambda$-déterminant d'une matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ convenable, noté $\det_\lambda M$, de la manière suivante.

Soit $(a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $\det_\lambda(a) = a$.

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det_\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + \lambda bc$.

On impose de plus, pour toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la formule de condensation suivante :

$$\det_\lambda M \det_\lambda [M]^{1,n}_{1,n} = \det_\lambda [M]^1_1 \det_\lambda [M]^n_n + \lambda \det_\lambda [M]^1_n \det_\lambda [M]^n_1 \qquad (2)$$

Cette condition (2) permet donc de définir, par récurrence, le $\lambda$-déterminant pour une matrice $M$ de taille $n \times n$, à la condition de ne pas avoir à diviser par 0 au cours de son calcul. Plus précisément, supposons que cette procédure par récurrence ait permis de définir le membre de droite de (2) ainsi que $\det_\lambda [M]^{1,n}_{1,n}$ et qu'en plus ce dernier soit non nul. Alors on définit $\det_\lambda M$ par (2) puisqu'on peut diviser par $\det_\lambda [M]^{1,n}_{1,n} \neq 0$.

Dans la suite, $M$ désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle $\det_\lambda M$ est bien défini.

**17** - Soit $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, et $j \in \{1, ..., n\}$. On note $M_{t,j}$ la matrice obtenue à partir de $M$ par multiplication de la $j^{eme}$ colonne de $M$ par $t$. Montrer que $\det_\lambda M_{t,j}$ est bien défini et donner sa valeur en fonction de $\det_\lambda M$ et de $t$.

On considère un vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que les réels $x_i$ sont tous non nuls. On introduit la matrice de Vandermonde de taille $n \times n$ :

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n},$$

où $x_i^{j-1}$ est le coefficient situé sur la $i-$ème ligne et la $j-$ème colonne.

**18** - On suppose que $x_j + \lambda x_i$ est non nul pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $1 \leq i < j \leq n$. Calculer $\det_\lambda V(x_1, x_2, ..., x_n)$ en fonction des $x_j + \lambda x_i$, $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$. (On commencera par le cas $n = 3$ puis on procédera par récurrence sur $n$).

## Fin du Problème

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Espaces vectoriels normés
- Compléments d'algèbre linéaire
- Suites récurrentes
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/psi