Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2013, filière PSI

Sciences industrielles de l'ingénieur

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Parties 1 et 2 : problématique et cahier des charges
- Parties 3 à 5 : loi de consigne, organisation structurelle et modes de commande
- Partie 6 : modélisation de la chaîne d'énergie
- Parties 7 et 8 : asservissement en couple et validation clinique

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/psi/2013/si

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,

ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,

DES TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,

DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT ETIENNE, DES MINES DE NANCY,

DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.

ECOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2013

ÉPREUVE DE SCIENCES INDUSTRIELLES

Filière : PSI

SUJET MIS A LA DISPOSITION DES CONCOURS : CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, INT, TPE-EIVP

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé

Cet énoncé comporte 11 pages numérotées de 1 à 11 et un document annexe de 4 pages. Le travail doit être reporté sur un document-réponse de 4 copies (16 pages) distribuées avec le sujet. Un seul document-réponse est fourni au candidat. Le renouvellement de ce document en cours d'épreuve est interdit. Pour valider ce document-réponse, chaque candidat doit obligatoirement y inscrire à l'encre, à l'intérieur du rectangle d'anonymat situé en haut de chaque copie, ses nom, prénoms (souligner le prénom usuel), numéro d'inscription et signature, avant même d'avoir commencé l'épreuve. Il est conseillé de lire la totalité de l'énoncé avant de commencer l'épreuve.

Les questions sont organisées au sein d'une progression logique caractéristique de la discipline, certaines questions étant partiellement dépendantes : il est donc souhaitable de les traiter dans l'ordre. La rédaction des réponses sera la plus concise possible : on évitera de trop longs développements de calculs en laissant subsister les articulations du raisonnement.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Prothèse active transtibiale

1 Problématique technique

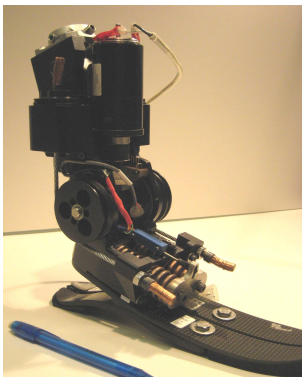


Illustration 1: Prothèse active

La majorité des prothèses transtibiales (pour une amputation en dessous du genou) utilisées aujourd'hui sont purement passives, c'est-à-dire que leurs propriétés mécaniques restent fixes pendant la marche (Illustration 2).

Ces prothèses sont constituées en général de semelles ressorts en carbone profilées qui emmagasinent et restituent l'énergie mécanique pendant la marche par déformation.



Illustration 2: Flex-Foot et Proprio-foot (Ossür)

Des études cliniques montrent que les amputés qui utilisent ce type de prothèse doivent fournir de 20 à 30 % d'énergie en plus pour obtenir une vitesse de déplacement équivalente à celle d'une personne non amputée effectuant le même déplacement. Ils souffrent également d'une dissymétrie de la marche (différence de comportement entre le côté amputé et le côté non amputé) qui fatigue les articulations des membres sains.

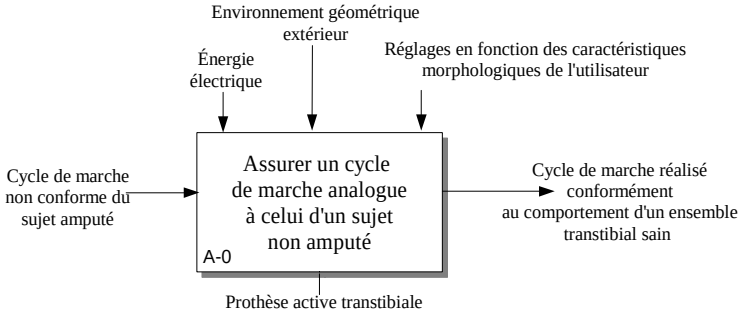


Illustration 3: SADT A-0 de la prothèse active

Des ingénieurs du M.I.T. ont mis au point une prothèse active transtibiale capable de proposer un comportement similaire à celui des membres non amputés (Illustration 3, SADT A-0). On étudie dans ce sujet le prototype initial qui a permis de valider la pertinence d'une telle prothèse active (Illustration 1).

L'étude sera menée en s'appuyant sur l'illustration 4.

Une analyse du système en situation, notamment du cycle de marche, sera réalisée afin de définir le cahier des charges (partie 2), la loi de consigne à appliquer (partie 3) et l'organisation structurelle du système (partie 4).

Une modélisation de la chaîne d'énergie (partie 6) et d'informations (parties 5 et 7) sera alors conduite.

Les paramètres du modèle seront identifiés à partir d'un montage d'essai (partie 6.4).

Les résultats de simulation seront alors comparés à la loi de consigne. Une validation clinique des résultats sur des patients finalisera l'étude (partie 8).

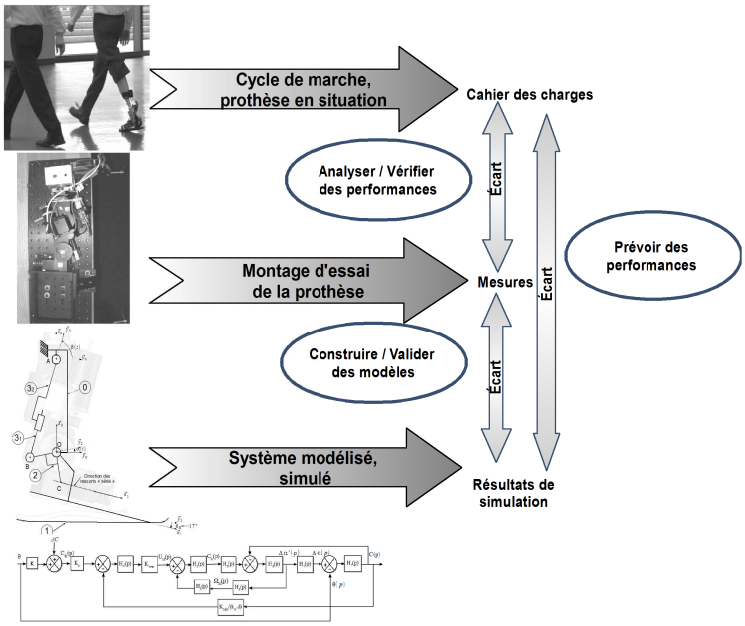


Illustration 4: Démarche d'étude

2 Mise en place du cahier des charges

Afin de pouvoir établir et justifier le cahier des charges fonctionnel de la prothèse active, une analyse du comportement des membres sous le genou (ensemble transtibial constitué du tibia, de la cheville et du pied) d'un sujet non amputé est menée dans cette partie.

2.1 Analyse de l'ensemble transtibial lors de la marche

Le cycle de marche est défini dans l'**annexe 1**. Il est constitué de deux phases principales : la phase d'appui et la phase oscillante. La phase d'appui correspond à environ 60 à 70% de la durée d'un cycle de marche notée T_c. Chaque cycle comporte 2 pas. Des relevés expérimentaux permettent d'estimer à 105 pas par minute la cadence d'une marche normale. Une marche rapide correspond à une cadence de 123 pas par minute en moyenne.

La phase d'appui peut être divisée en 3 sous-phases détaillées en **annexe 1**.

Pour analyser le comportement de l'ensemble transtibial, on modélise le tibia et le pied par des solides indéformables et la cheville par une liaison pivot d'axe $(O,\vec{x})$.

On associe :

- le repère $R_0(O,\vec{x},\vec{y_0},\vec{z_0})$ au tibia noté 0,
- le repère $R_1(O,\vec{x},\vec{y_1},\vec{z_1})$ au pied noté 1.

On note $\theta=(\vec{y_0},\vec{y_1})=(\vec{z_0},\vec{z_1})$ l'angle de rotation du pied par rapport au tibia.

La figure du document-réponse (question 1) décrit l'évolution de l'angle θ mesuré expérimentalement au cours d'un cycle (abscisse en pourcentage) pour une **cadence de marche normale**. Les relevés sont réalisés pour une personne aux mensurations moyennes de 75 kg pour 1,75 m .

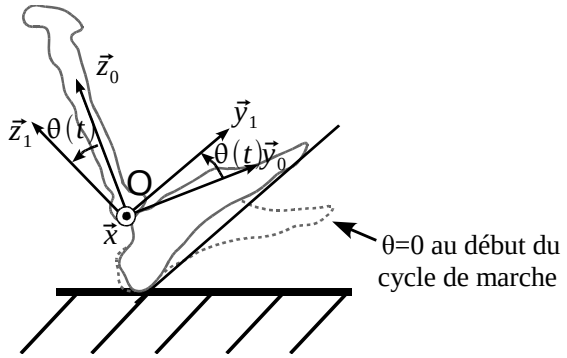


Illustration 5: Paramétrage du modèle de solides indéformables pied/tibia

Question 1. Indiquer sur cette figure les phases d'appui (ST) et d'oscillation (SW) ainsi que les sous-phases CP, CD et PP. Déterminer la valeur absolue de la vitesse angulaire maximale du pied en rad/s $\left|\frac{d\theta}{dt}\right|_{max}$ *sachant que le cycle est celui d'une* ***marche normale****.*

Pour contrôler le mouvement, les muscles doivent compenser le moment imposé par le corps en déséquilibre. Cette action des muscles peut être modélisée par un couple au niveau de la cheville agissant sur le pied 1 et noté C_{exp}. Une instrumentation spécifique appelée « plate-forme de forces » permet d'évaluer l'évolution du couple au cours de la marche.

On donne ci-après la courbe du couple exercé selon l'axe $(O,\vec{x})$ de la cheville C_{exp} en fonction de l'angle θ pour une **marche normale** (Illustration 6). Les différentes phases du mouvement décrites dans l'annexe sont rappelées. L'aire contenue à l'intérieur de cette courbe fermée représente le travail W que doit fournir l'organisme pendant un cycle (avec C_{exp} en $N\cdot m$ et θ en rad). Pour une marche normale, cette aire correspond à une énergie estimée à 14 joules.

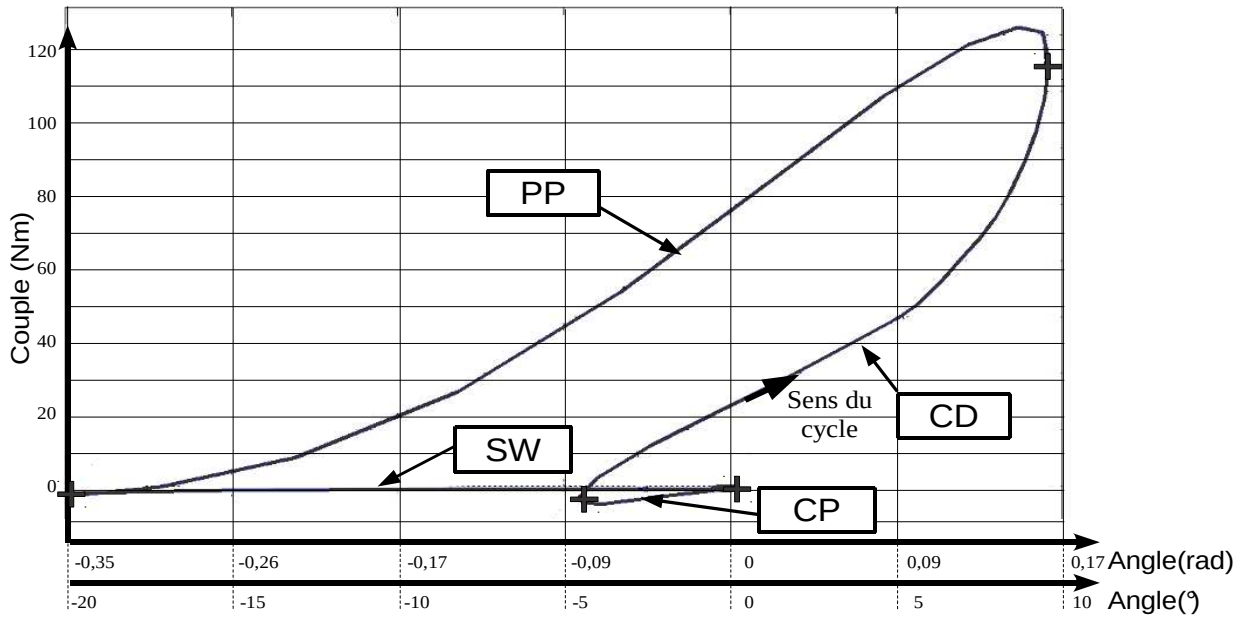


Illustration 6: Courbe expérimentale du couple en fonction de l'angle de la cheville pour une marche normale

2.2 Définition du cahier des charges

L'ensemble des courbes et analyses permet de définir le cahier des charges relatif à la fonction principale.

Fonction	Critères	Valeurs
Assurer un cycle de marche analogue à celui d'un sujet non amputé	Masse de la prothèse (correspond sensiblement à la masse d'un ensemble sain)	2,5 kg
	Hauteur maximale de la prothèse (proche de celle d'un ensemble sain)	32 cm
	Valeurs extrêmes de l'angle θ	Flexion plantaire propulsive : - 25 ° Dorsiflexion : 15 °
	Vitesse angulaire maximale $\left\lvert \frac{d\theta}{dt} \right\rvert_{max}$	5,2 $rad\cdot s^{-1}$
	Couple maximal à fournir	140 $N\cdot m$
	Travail maximal à fournir pour un cycle	20 J

Question 2. Vérifier que le cahier des charges ainsi spécifié est cohérent. Pour cela, relever et compléter sur le document-réponse les valeurs associées à certains critères pour une marche normale. Conclure vis-à-vis du respect du cahier des charges dans son ensemble.

3 Définition de la loi de consigne en couple

L'objectif de cette partie est de définir la loi de consigne théorique que devra suivre la prothèse pour répondre à la fonction principale. Cette loi sera implantée dans le calculateur de la prothèse.

Le comportement de la prothèse peut être schématisé par le bloc fonctionnel suivant (Illustration 7) :

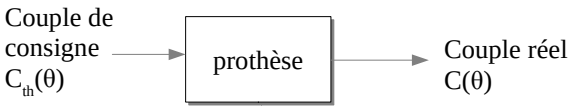
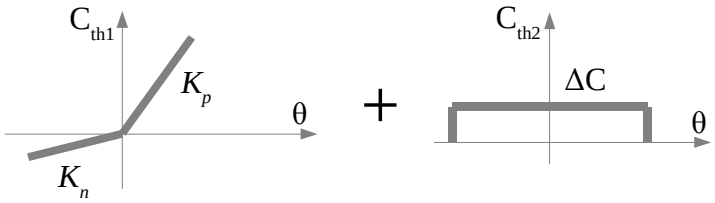


Illustration 7: Comportement global de la prothèse

L'hypothèse faite par les concepteurs est de considérer que la vérification exacte de la loi expérimentale $C_{exp}(\theta)$ est moins importante que le respect de la valeur du travail à fournir W.

C'est pourquoi, le choix d'une loi de consigne théorique approchée est retenu. La courbe du document-réponse (question 3) compare la loi théorique $C_{th}(\theta)$ à la loi relevée expérimentalement $C_{exp}(\theta)$.



Comportement du ressort de torsion pendant la phase d'appui

Ajout d'un couple supplémentaire à partir du moment où $C_{th}>C_{lim}$

Illustration 8: Décomposition de la loi théorique

Cette loi théorique est obtenue à partir du comportement d'un ressort de torsion (Illustration 8, C_{th1}) auquel on ajoute un couple ΔC à partir du moment où le couple C_{th} dépasse une valeur C_{lim} jusqu'à ce que la phase d'oscillation commence (Illustration 8, C_{th2}). Ainsi $C_{th}=C_{th1}+C_{th2}$. Les paramètres C_{lim}, K_p, K_n, ΔC seront choisis par l'utilisateur en fonction du ressenti lors de la marche.

Question 3. A partir de la courbe du document-réponse (question 3), donner les valeurs numériques de K_n, K_p (en $N\cdot m\,rad^{-1}$), ΔC, C_{lim} (en $N\cdot m$). Déterminer alors l'expression littérale du travail théorique W_{th} correspondant à l'aire de cette courbe fermée (avec θ en rad) en fonction de C_{lim}, K_p, K_n, ΔC uniquement. En déduire la valeur numérique de W_{th} et conclure sur la pertinence de la loi retenue.

L'objectif est donc de réaliser une prothèse active qui soit capable de suivre cette loi théorique.

4 Organisation structurelle de la prothèse active

Pour élaborer la commande de la prothèse, il est indispensable d'appréhender l'organisation structurelle de la prothèse active. Cela constitue une étape préalable au travail de modélisation qui suivra.

L'**annexe 2** fournit une description des chaînes d'énergie et d'informations.

Question 4. Compléter le schéma du document-réponse (question 4) en précisant les fonctions, moyens et flux manquants.

5 Gestion des modes de commande

La commande du calculateur ne possède pas le même comportement lors des phases et sous-phases du cycle de marche. L'objectif de cette partie est de choisir le type d'asservissement à adopter par le calculateur en fonction de ces sous-phases. Les relations obtenues seront alors implantées dans le calculateur (niveau hiérarchique supérieur).

On se référera à la description des phases et sous-phases de marche donnée en **annexe 1**.

Le mode de commande en orientation est classique et n'est utile que dans la phase oscillante (le pied n'est pas en contact avec le sol). On lui associe la variable logique Cor telle que $Cor=1$ lorsque le mode de commande en orientation est actif.

Le mode de commande en couple (pendant la phase d'appui) peut être décomposé en 3 modes différents :

- lorsque l'angle θ est négatif, la pente souhaitée de la loi de consigne $C_{th}(\theta)$ est égale à K_n. On appelle ce

mode « Mode C1 » et on lui associe la variable logique C_1 telle que $C_1=1$ lorsque ce mode est actif,

- lorsque l'angle θ est positif, la pente souhaitée de la loi $C_{th}(\theta)$ est égale à K_p. Ce mode est appelé « Mode C2 » et on lui associe la variable C_2 telle que $C_2=1$ lorsque ce mode est actif,
- lorsque le couple C_{th} est supérieur à C_{lim}, un couple ΔC constant est ajouté à C_{th} et ce jusqu'à ce que le couple C_{th} devienne nul. On appelle ce mode « Mode C3 ».

Les capteurs capacitifs situés au niveau du talon fournissent une information binaire T_a telle que $T_a=1$ lorsqu'ils touchent le sol. De même les capteurs situés au niveau de l'avant du pied fournissent une information binaire P, telle que $P=1$ lorsqu'ils touchent le sol. On introduit la variable binaire $[\theta<0]$ qui est vraie lorsque $\theta<0$ (cette variable est fausse lorsque $\theta\geqslant 0$).

Question 5. Compléter à l'aide des indications précédentes, de la loi souhaitée et de la description d'un cycle, le chronogramme des variables binaires T_a et P (document-réponse question 5) à partir du moment où le talon touche le sol (début de la phase d'appui) jusqu'au cycle suivant (durée d'un cycle T_c). En déduire les expressions logiques des variables C_1, C_2 et Cor en fonction de $[\theta<0]$, T_a et P. Vous utiliserez à bon escient les situations qui n'apparaissent pas dans le chronogramme.

Question 6. En se référant uniquement à la description du mode de commande C3 donnée précédemment, compléter le grafcet en utilisant les variables proposées C_{th}, C_{lim} et ΔC (zones en pointillés du document-réponse, question 6) spécifiant ce mode de commande en respectant la syntaxe du grafcet.

6 Modélisation de la chaîne d'énergie

La validation des performances dans les phases de commande en orientation d'une part et de commande en couple d'autre part nécessite la mise en place d'un modèle de chacun des constituants de la chaîne d'énergie (voir le schéma-bloc en annexe 3). L'objectif de cette partie est donc d'élaborer progressivement ce schéma-bloc en déterminant les fonctions de transfert.

A partir de la structuration de la chaîne d'énergie, on retient le modèle décrit par le schéma-bloc donné en **annexe 3**.

Le paramétrage de la prothèse est fourni en **annexe 5.**

6.1 Modélisation de la chaîne de transmission

L'objectif de cette partie est de valider l'aptitude du système à reproduire un mouvement du pied à la vitesse angulaire maximale de $5,2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ spécifiée dans le cahier des charges. Dans un premier temps, il s'agira de déterminer la relation entre la rotation du pied artificiel par rapport au tibia et la translation de la tige du vérin électrique. Dans un second temps, une analyse plus fine du fonctionnement du vérin électrique permettra de remonter à la vitesse angulaire du moteur.

La vitesse angulaire maximale est atteinte durant la phase oscillante (le pied n'est plus en contact avec le sol). Durant cette phase, nous supposerons que le pied et le basculeur ne possèdent pas de mouvement relatif. Rechercher une relation entre θ et λ, revient donc à déterminer la relation entre α et λ (voir annexe 5).

Question 7. A partir du paramétrage de la prothèse fourni en annexe 5, exprimer λ en fonction de α et de la géométrie. Proposer alors une relation simplifiée au regard du graphe (Illustration 9) correspondant à la relation théorique obtenue. En déduire la valeur numérique du gain K_G (en $\text{mm}\cdot\text{rad}^{-1}$) telle que $\frac{d\lambda}{dt}=K_G\frac{d\alpha}{dt}$.

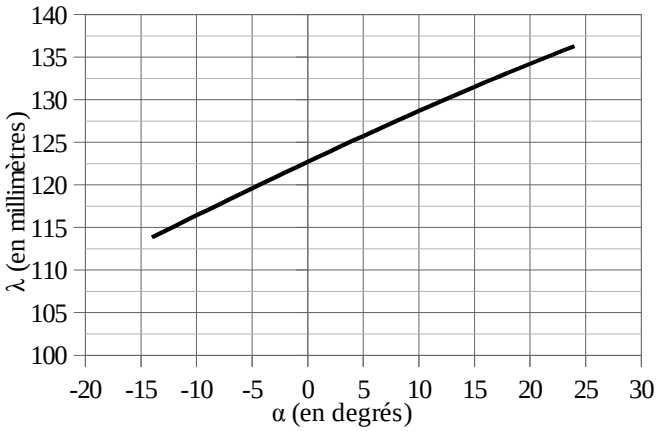


Illustration 9: Évolution de la longueur du vérin électrique en fonction de l'angle du basculeur

Le vérin électrique est mis en mouvement par l'intermédiaire d'un moteur électrique à courant continu Maxon dont les caractéristiques sont données en **annexe 4**. Le mouvement de rotation du moteur est adapté par l'intermédiaire d'un système poulies-courroie suivi d'un système vis-écrou.

Question 8. Compléter sur le document-réponse (question 8) le schéma cinématique détaillant le fonctionnement du vérin électrique. On s'aidera de la représentation du système poulies-courroie donnée dans le document-réponse.

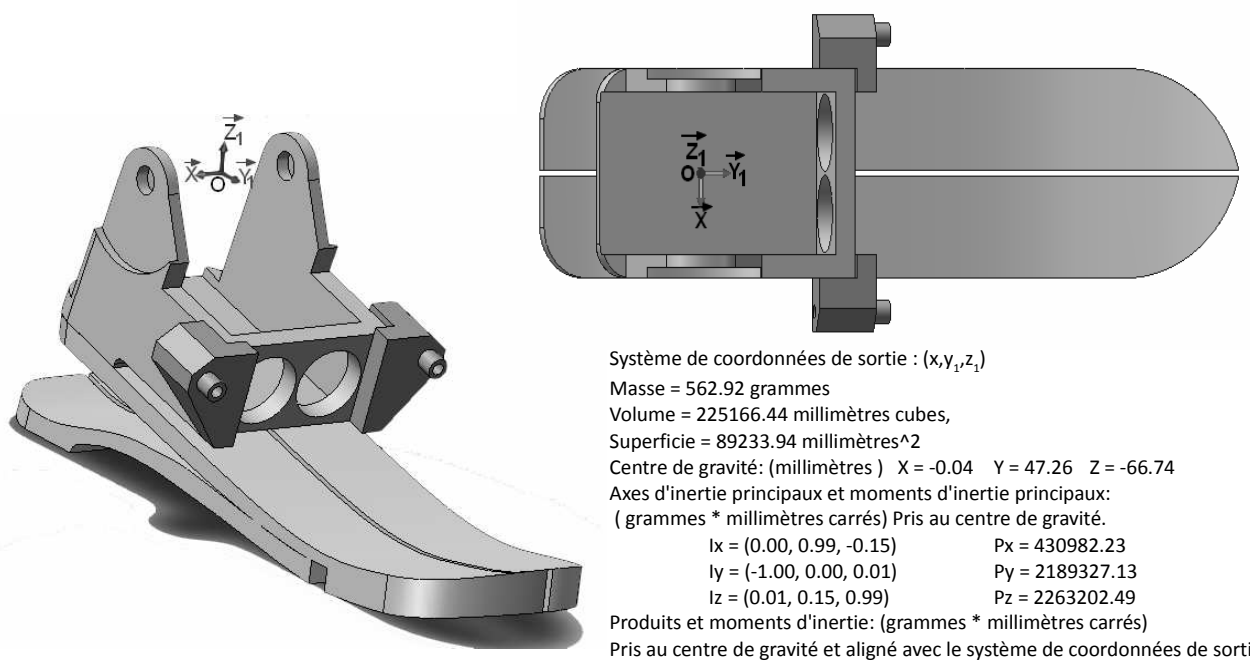
Le système vis-écrou est équipé d'une vis à billes de pas à droite p_v avec $p_v = 3\,\text{mm}\cdot\text{tour}^{-1}$. Le réducteur poulie–courroie possède un rapport de réduction $k = \frac{1}{2{,}1}$. On note R_T le rapport entre la vitesse angulaire du rotor du moteur par rapport au stator (3_2), ω_M et la vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$ tel que $\frac{d\alpha}{dt} = R_T\,\omega_M$.

Question 9. En déduire les expressions littérales des blocs $H_4(p)$ et $H_5(p)$. Déterminer la valeur numérique de R_T. Conclure sur l'aptitude du moteur à générer la vitesse maximale exigée.

6.2 Modélisation du comportement inertiel du pied artificiel

L'objectif de cette partie est d'évaluer l'influence des caractéristiques d'inertie de chacun des constituants sur la dynamique du système.

Le pied artificiel est défini par le modèle volumique représenté ci-dessous. La masse volumique est considérée homogène sur le solide et le matériau retenu est le carbone. Une évaluation des caractéristiques inertielles exprimées dans le repère $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est réalisée (Illustration 10).



Système de coordonnées de sortie : (x,y_1,z_1)
Masse = 562.92 grammes
Volume = 225166.44 millimètres cubes,
Superficie = 89233.94 millimètres^2
Centre de gravité: (millimètres) X = -0.04 Y = 47.26 Z = -66.74
Axes d'inertie principaux et moments d'inertie principaux:
(grammes * millimètres carrés) Pris au centre de gravité.

Ix = (0.00, 0.99, -0.15)	Px = 430982.23
Iy = (-1.00, 0.00, 0.01)	Py = 2189327.13
Iz = (0.01, 0.15, 0.99)	Pz = 2263202.49

Produits et moments d'inertie: (grammes * millimètres carrés)
Pris au centre de gravité et aligné avec le système de coordonnées de sortie.

Lxx = 2189331.91	Lxy = -28.15	Lxz = -596.72
Lyx = -28.15	Lyy = 473696.69	Lyz = -276473.46
Lzx = -596.72	Lzy = -276473.46	Lzz = 2220483.25

Illustration 10: Caractéristiques inertielles du pied artificiel fournies par le modeleur volumique

Question 10. A partir de la représentation volumique du pied artificiel, indiquer dans quel plan théorique se trouve le centre d'inertie G. Proposer une forme théorique simplifiée de la matrice d'inertie I_G en G dans la base $(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. A partir des caractéristiques inertielles fournies par le modeleur volumique et en accord avec l'analyse précédente, proposer des valeurs numériques (3 chiffres significatifs) pour la matrice d'inertie I_G en utilisant des $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ comme unité. Calculer alors numériquement le moment d'inertie J_p du pied artificiel suivant l'axe $(O, \vec{x})$.

Hypothèses et données :

- La vitesse angulaire $\frac{d\beta}{dt}$ étant petite devant les autres vitesses, elle sera négligée. Les masses et inerties des pièces autres que l'axe moteur et le pied artificiel ne sont pas considérées,
- le moment principal d'inertie de l'axe moteur suivant son axe de rotation $(D,\vec{y}_3)$ (voir document-réponse, question 8) est donné dans l'annexe 4 et vaut $J_M = 1{,}34.10^{-5}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$,
- le moment d'inertie du pied artificiel suivant l'axe $(O,\vec{x})$ est noté J_p (cf. question précédente),
- le référentiel galiléen est lié au tibia considéré comme fixe,
- on rappelle que $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$ durant la phase oscillante.

Question 11. Déterminer l'expression littérale de l'inertie équivalente J_{eq} de l'ensemble {pied+arbre moteur}, ramenée sur l'axe de rotation de la cheville $(O,\vec{x})$. Effectuer l'application numérique. En déduire l'influence des caractéristiques inertielles du pied artificiel par rapport à celle du moteur sur la dynamique du système.

6.3 Comportement dynamique de la prothèse

L'objectif de cette partie est d'établir les équations de comportement dynamique de la prothèse autour de la position de repos lors des phases d'appui et oscillante. Ces équations permettront de compléter le schéma-bloc de la chaîne d'énergie.

Hypothèses et données :

- Seule l'inertie J_M du rotor du moteur suivant son axe de rotation $(D,\vec{y}_3)$ est prise en compte,
- les quantités dynamiques des autres pièces ne sont pas prises en compte,
- la chaîne cinématique est caractérisée par la relation $\frac{d\alpha}{dt} = R_T\,\omega_M$ (avec ω_M la vitesse angulaire du rotor par rapport au tibia. $\frac{d\beta}{dt}$ étant négligé, le stator 3_2 est considéré fixe par rapport au tibia),
- les liaisons sont supposées parfaites,
- attention, dans le cas général considéré ici, on prendra $\frac{d\alpha}{dt} \neq \frac{d\theta}{dt}$.

Modélisation des actions mécaniques (voir annexe 5 également) :

- les actions mécaniques de la pesanteur sont négligées devant les autres actions mécaniques mises en jeu,
- le moteur génère un couple sur son axe tel que $\vec{C}_{Moteur\to M} = C_M\,\vec{y}_3$,
- l'amortissement de l'ensemble du système est modélisé par un coefficient de frottement visqueux μ_M exprimé sur l'axe moteur générant un couple : $\vec{C}_{amortisseur\to M} = -\mu_M\,\omega_M\,\vec{y}_3$ avec μ_M identifié expérimentalement (unité $\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$),
- les ressorts exercent une action mécanique entre le pied 1 et le basculeur 2. Elle est modélisée par un glisseur $\vec{F}_{ressort\to 2} = -\vec{F}_{ressort\to 1} = -F_{RS}\,\vec{n}_1$ au point S,
- un couple extérieur $-\text{C}\,\vec{x}$ est appliqué sur le pied artificiel 1. En commande en couple, cette action mécanique C constitue la grandeur à asservir suivant la loi théorique $C_{\text{th}}(\theta)$.

Définition du référentiel galiléen d'étude :

L'analyse du cycle de la marche a mis en évidence la présence de multiples phases aux mouvements variés du tibia et du pied. La mise en place d'un modèle dynamique de la prothèse impose la définition d'un référentiel galiléen qui, pour être au plus près du comportement réel, diffère suivant les phases d'étude. Il apparaît donc

particulièrement complexe de définir une étude dynamique pour chacune de ces phases.

Afin d'identifier le comportement du système dans le cadre d'un réglage des paramètres de la commande, le modèle suivant est défini :

- le tibia est considéré comme fixe. Le référentiel associé est supposé galiléen,
- les mouvements de la prothèse sont étudiés par rapport au repère du tibia.

Ce modèle est proche du comportement réel. Dans plusieurs phases, le mouvement du tibia est nul ou assimilé à un mouvement de translation rectiligne uniforme. De plus, l'identification des paramètres de la modélisation retenue ainsi que la validation du comportement de la prothèse s'effectuent en premier lieu sur un montage d'essai où le tibia est fixe (voir partie suivante).

Question 12. En isolant le pied 1 et en négligeant son inertie, déterminer une relation entre C *et* F_{RS}*. Vous veillerez à expliciter clairement votre démarche (principe ou théorème, équation écrite, projection...).*

La raideur équivalente des ressorts est $k_{RS}=1200.10^3 N\cdot m^{-1}$. On ne s'intéresse dans la modélisation qu'aux variations de la prothèse autour de sa position de repos (cf. paramétrage autour de la position repos en **annexe 5**).

On note $\Delta\chi$ la variation de longueur des ressorts. L'effort F_{RS} exercé par ces ressorts autour de la position repos est donné par la relation linéarisée suivante $F_{RS}=k_{RS}\Delta\chi$.

Question 13. A partir de la relation obtenue à la question précédente, montrer qu'il est possible d'obtenir une relation linéarisée (à l'ordre 0) autour de la position repos sous la forme $C=d_0 F_{RS}$ *où* d_0 *sera exprimé en fonction de* b, α_R *et* δ_R*. Sachant que* $\Delta\chi=d_0(\Delta\alpha-\theta)$*, donner alors l'expression de la fonction de transfert* $H_7(p)$.

Par la suite, on prendra $d_0=0{,}035\,\text{m}$.

Afin de déterminer la relation de comportement dynamique, on isole l'ensemble de la prothèse en mouvement par rapport au tibia dont le référentiel associé est supposé galiléen.

Question 14. Déterminer l'expression littérale de la puissance des inter-efforts générée par le ressort entre le pied artificiel 1 et le basculeur 2.

Question 15. Mettre en œuvre le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble de la prothèse en mouvement par rapport au tibia. En utilisant la relation de la chaîne cinématique, en déduire une relation faisant intervenir les paramètres de mouvement, leurs dérivées, ainsi que les paramètres caractéristiques du système et actions mécaniques définies dans l'énoncé.

A partir des relations déterminées aux Question 12. et Question 15., il est alors possible de trouver l'équation différentielle linéarisée suivante qui caractérise le comportement dynamique de la prothèse :

$$J_M\frac{d^2\Delta\alpha(t)}{dt^2}+\mu_M\frac{d\Delta\alpha(t)}{dt}=C_M(t)R_T-C(t)R_T^2 \text{ avec } R_T=\frac{1}{145}$$

Le moteur électrique est régi par les équations électriques et de couplage électromécanique :

$u_M(t)=Ri(t)+e(t)$ avec $\text{i}(t)$ courant moteur et $\text{e}(t)$ f.c.e.m.

$e(t)=k_c\omega_M(t)$ avec ω_M vitesse angulaire du rotor du moteur par rapport au stator

$C_M(t)=k_c i(t)$

Les constantes intervenant dans ces équations sont définies dans l'**annexe 4**.

Question 16. A partir des équations caractérisant le système, déterminer les expressions littérales des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ *et* $H_6(p)$.

6.4 Identification d'un modèle de comportement de la chaîne d'énergie

Le modèle de la chaîne d'énergie étant défini, on cherche maintenant à déterminer plus précisément les valeurs numériques des coefficients intervenant dans les fonctions de transfert de la chaîne d'énergie.

On procède pour cela à une identification fréquentielle du comportement de la prothèse. L'expérience consiste à bloquer le tibia ainsi que le pied et à envoyer une commande en tension sinusoïdale au moteur en faisant varier la fréquence du signal. Dans ces conditions, le basculeur se déplace et écrase le ressort. On peut alors relever le couple C au niveau de la cheville (Illustration 11).

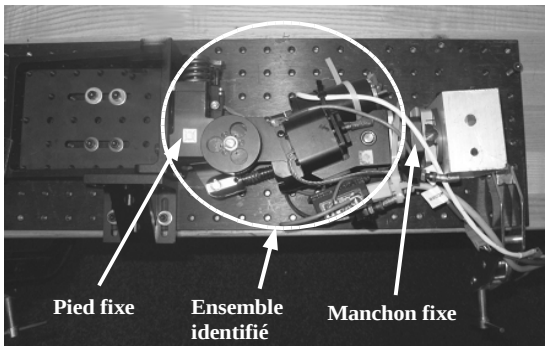


Illustration 11: Montage expérimental : pied et tibia (manchon) bloqués

Question 17. Déterminer la fonction de transfert de la chaîne d'énergie $H(p)=\dfrac{C(p)}{U_M(p)}$ *à partir des fonctions de transfert* $H_i(p)$ *définies dans le schéma bloc* ***dans le cadre de l'expérience d'identification décrite précédemment (pied et tibia bloqués)****. En utilisant les expressions de chacune des fonctions de transfert déterminées lors de la modélisation, donner les expressions de* K_0 *le gain de la fonction de transfert,* ω_0 *la pulsation propre non amortie et* ξ_0 *le coefficient d'amortissement.*

On obtient alors les diagrammes de Bode donnés dans le document-réponse (question 18). **Attention, l'abscisse est en hertz et le gain est normalisé** $G_{dB}=20\log\left(\dfrac{|H(p)|}{K_0}\right)$. La courbe en tirets représente le modèle du second ordre déterminé précédemment s'approchant au mieux des courbes expérimentales.

Question 18. Déterminer les valeurs numériques de la pulsation propre non amortie ω_0 *et du coefficient d'amortissement* ξ_0 *à partir de la représentation approchée (courbe en tirets), en détaillant succinctement la méthode utilisée. Les tracés seront faits sur le document-réponse.*

Question 19. A partir des résultats précédents (Question 17. et Question 18.), en déduire la valeur « expérimentale » de J_M *inertie du moteur et conclure sur les hypothèses concernant les inerties des pièces utilisées pour déterminer l'équation dynamique de la prothèse (hypothèses formulées en partie 6.3).*

7 Contrôler le processus lors de la phase d'appui

La gestion des modes de commande permet de définir les séquences où l'asservissement s'effectue en position et celles où l'asservissement s'effectue en couple. L'objectif de cette partie est de définir l'asservissement en couple et d'analyser les performances de cet asservissement.

7.1 Mise en place de l'asservissement en couple

On se place pour analyser les performances de l'asservissement en couple dans le cadre de l'expérience d'identification décrite précédemment (pied et tibia bloqués).

L'asservissement en couple est réalisé grâce à un potentiomètre linéaire qui délivre une tension u_{mes} image de la variation de longueur des ressorts $\Delta\chi$. On note K_{capt} le gain de ce capteur. D'autre part, un bloc d'adaptation de gain K_A permet d'obtenir une tension u_{th} image du couple de consigne C_{th}. L'écart ε entre les tensions u_{th} et u_{mes} est corrigé par un correcteur de fonction de transfert $H_c(p)$ qui délivre la tension u_M au moteur par l'intermédiaire de l'amplificateur de gain K_{amp}.

Question 20. Compléter le schéma-bloc du document-réponse (question 20) afin de mettre en place l'asservissement en couple. Proposer une expression de K_A *permettant de réaliser un asservissement correct.*

7.2 Analyse des performances de l'asservissement en couple.

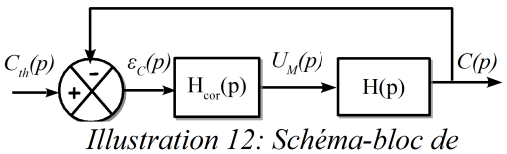


Illustration 12: Schéma-bloc de l'asservissement en couple simplifié

Le schéma-bloc de l'asservissement en couple peut être simplifié par le schéma-bloc suivant avec $H(p)=\dfrac{a_0}{1+a_1 p+a_2 p^2}$

où $a_0 = 2,9\,\mathrm{N\cdot m\cdot V^{-1}}$, $a_1 = \frac{26}{4356}\,\mathrm{s}$ et $a_2 = \frac{1}{4356}\,\mathrm{s^2}$ et $\mathrm{H}_{cor}(p) = \mathrm{H}_c(p)\mathrm{K}_{amp}\mathrm{K}_\mathrm{A}$

L'objectif est de déterminer une correction $H_{cor}(p)$ qui permette de respecter le cahier des charges rappelé ci-dessous.

Critères	**Valeur**
Rapidité (temps de réponse à 5%)	$t_{r5\%} < 0,1\,\mathrm{s}$
Stabilité (marge de phase)	$M_\varphi = 45°$
Précision pour une entrée en échelon (écart normalisé par la valeur de l'échelon)	10 % maxi

On choisit dans un premier temps une correction proportionnelle telle que $\mathrm{H}_{cor}(p) = \mathrm{K}_{cor}$.

Question 21. Déterminer l'expression de l'écart statique pour une entrée en échelon unitaire. En déduire la valeur de K_{cor} notée K_{cor1} qui permette d'assurer le critère du cahier des charges.

Les diagrammes de Bode de la fonction $H(p)$ sont donnés dans le document-réponse (question 22).

Question 22. Déterminer graphiquement la valeur du correcteur proportionnel, notée K_{cor2} pour assurer une marge de phase $M_\varphi = 45°$. Conclure sur l'aptitude du correcteur à vérifier les critères de précision et stabilité.

On retient finalement une correction telle que : $H_{cor}(p) = K_p + K_d\,p\frac{\tau_d}{1+\tau_d\,p}$ avec $\mathrm{K}_p = 4,3\,\mathrm{V\cdot N^{-1}\cdot m^{-1}}$, $K_d = 20,6\ \mathrm{V\cdot N^{-1}\cdot m^{-1}}$ et $\tau_d = 0,0016\,\mathrm{s}$

Question 23. Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de ce correcteur en précisant les expressions et valeurs numériques des pulsations et des gains caractéristiques. Donner le nom de ce correcteur et expliquer l'intérêt d'utiliser ce correcteur en donnant le(s) rôle(s) de chacun des 3 termes de ce correcteur K_p, $K_d\,p$ et $\frac{\tau_d}{1+\tau_d\,p}$.

Les diagrammes de Bode de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) corrigée sont donnés sur le document-réponse (question 24). On réalise également une simulation pour une entrée en échelon de couple de $50\,\mathrm{N\cdot m}$. La réponse indicielle du couple C ainsi que l'évolution de la tension de commande de la prothèse u_M au cours du temps sont alors représentées.

Question 24. A l'aide des courbes du document-réponse (question 24), valider l'ensemble des critères du cahier des charges en justifiant clairement vos réponses. Indiquer pourquoi le modèle retenu n'est pas acceptable physiquement et proposer une amélioration simple du modèle permettant de pallier l'inconvénient repéré.

8 Validation clinique de la prothèse active

Après validation, le mode de contrôle mis en place montre la capacité de la prothèse à fournir un travail donné pour un cycle de marche. Cependant, les apports de la prothèse active en comparaison avec une prothèse passive conventionnelle doivent être mesurés.

Plusieurs expériences sont menées sur trois patients amputés d'un seul côté. Chaque expérience est réalisée sur une distance de 100 m à vitesse de déplacement choisie par le patient en utilisant sa prothèse conventionnelle ou la prothèse active. La dynamique de la marche est également analysée à l'aide d'appareils de mesure spécifiques (tapis de mesure de la marche, marqueurs rétro-réfléchissants ...).

Ces mesures permettent d'obtenir :

- la dépense énergétique notée E_m de chaque patient lors des déplacements (à partir des taux d'oxygène absorbé et de dioxyde de carbone rejeté). On définit alors le coût métabolique de transport (COT) comme le rapport $\mathrm{COT} = \frac{E_m}{M\,g\,V\,T}$ où M est la masse du participant, g l'accélération de la pesanteur, V la vitesse moyenne du patient et T la durée d'observation ,
- le travail des actions du sol sur le patient (les valeurs correspondent à une moyenne sur les 3 patients ainsi que sur un grande nombre de cycles) en distinguant (Illustration 13) :
  - le travail résistif lorsque le pied entre en contact avec le sol. Conjointement à l'effort de contact entre le pied et le sol, ce travail fournit une image du choc encaissé par les articulations. Il devra a minima être compensé dans la phase propulsive,
  - le travail propulsif lorsque le pied quitte le sol.

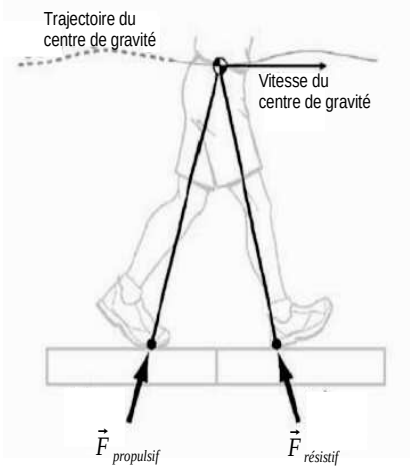


Illustration 13: Représentation schématique des actions mécaniques de contact dans les phases de flexion plantaire amortie (phase résistive) et de flexion plantaire propulsive (phase propulsive).

	COT pour trois patients ($J.N^{-1}.m^{-1}$)			**Moyenne du travail propulsif des actions du sol sur un cycle de marche (J)**	**Moyenne du travail résistif des actions du sol sur un cycle de marche (J)**
	Sujet 1	**Sujet 2**	**Sujet 3**		
Prothèse conventionnelle	0,27	0,25	0,3	67	67
Prothèse active	0,23	0,2	0,27	70	53

Tableau 1: Relevés expérimentaux sur différents patients

*Question 25. Analyser **quantitativement** (donner des pourcentages par rapport aux valeurs obtenues pour la prothèse conventionnelle) les performances de la prothèse active comparées à celles d'une prothèse conventionnelle à partir du tableau précédent. Évaluer l'apport moyen d'énergie de la prothèse active sur un cycle et commenter la valeur obtenue. Conclure vis-à-vis des effets cliniques sur le patient exposés dans la partie I « problématique technique ».*

L'illustration suivante montre la prothèse commercialisée (modèle BIOM), évolution de la prothèse étudiée dans le sujet.



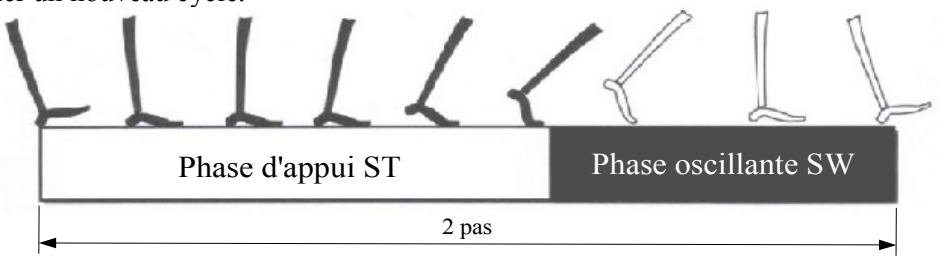
Fin du sujet

Cycle de marche (Annexe 1)

1 Phases principales

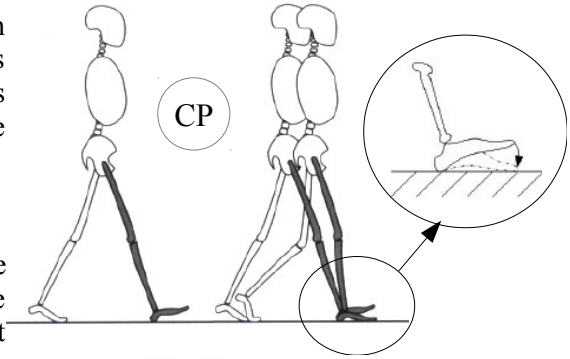
La marche est organisée en cycles de mouvements des membres inférieurs. Ces cycles sont reproductibles et symétriques. On ne s'intéresse dans cette étude qu'à la description du cycle de marche de l'ensemble transtibial en ligne droite à vitesse constante. On suppose que les membres supérieurs n'influencent pas la marche.
Le cycle de marche correspond spatialement à une enjambée ou à 2 pas. Par convention, le cycle de marche normale débute lorsque le talon d'un pied se pose et se termine lorsque ce même talon se pose à nouveau sur le sol en un endroit différent.
Le cycle comprend deux phases essentielles :

- la **phase d'appui (ST)** qui commence lorsque le talon touche le sol et se termine lorsque les orteils le quittent,
- et la **phase oscillante (SW)** pendant laquelle le pied ne touche pas le sol mais est déplacé pour effectuer un nouveau cycle.



2 Sous-phases

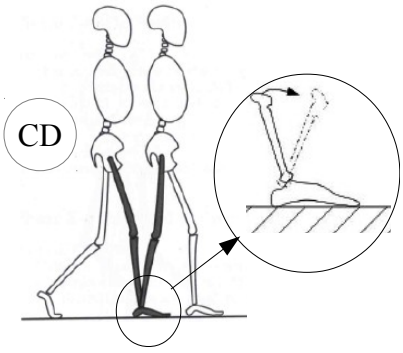
Pour analyser plus finement la marche, on se place dans le plan médian qui sépare la moitié droite de la moitié gauche du corps (plan sagittal). En effet, la très grande majorité des mouvements se font dans des plans parallèles à ce plan sagittal, ce qui valide l'hypothèse d'une étude plane.

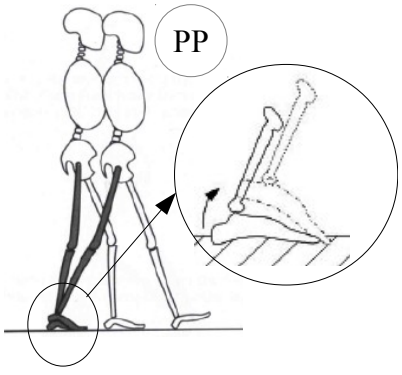


La phase d'appui est constituée de 3 sous-phases successives :

- **sous-phase « CP » (flexion plantaire amortie)** : elle débute lorsque le talon touche le sol et se termine lorsque les orteils touchent le sol (le pied est alors à plat sur le sol). C'est durant cette phase qu'intervient le transfert de charges d'une jambe à l'autre.

- **sous-phase « CD » (dorsiflexion ou flexion du pied contrôlée)** : durant cette phase, le tibia se repositionne vers l'avant de manière à pouvoir propulser le corps lors de la phase suivante.



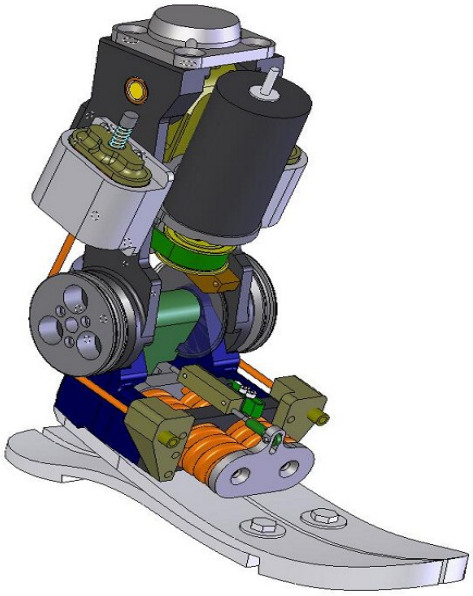


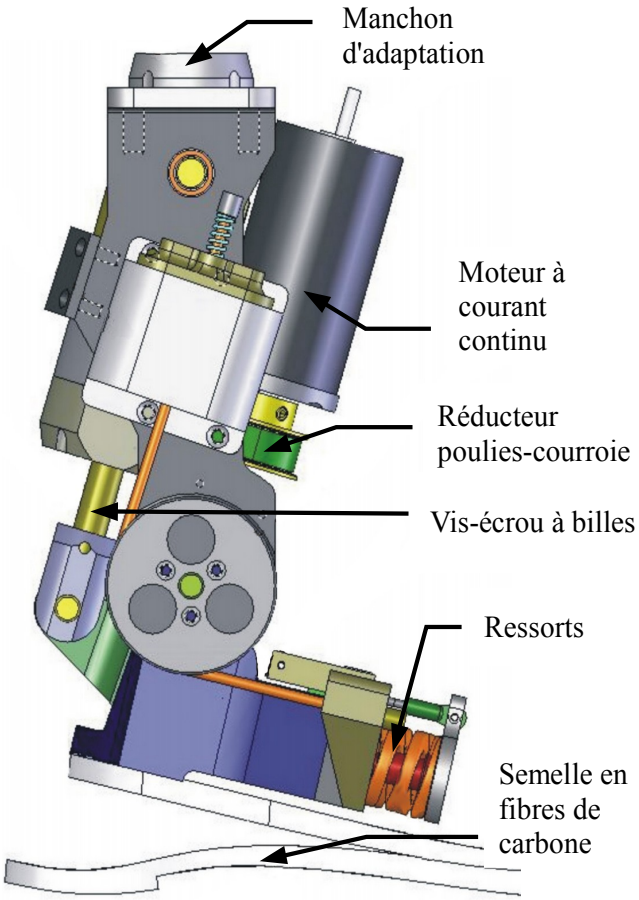
- **Sous-phase « PP »**
  (flexion plantaire propulsive) : cette phase commence après la phase CD lorsque le talon commence à quitter le sol et se termine lorsque les orteils le quittent également. Pendant cette phase, l'énergie mécanique accumulée lors de la phase précédente est restituée. Cependant, pour les marches modérées à rapides, la propulsion nécessite un travail supplémentaire provenant des muscles. Ce travail noté W se caractérise physiquement par un essoufflement du marcheur lors d'une marche rapide.

Structure des chaînes d'énergie et d'informations (Annexe 2)

1 Chaîne d'énergie

L'actionneur de la prothèse est un moteur à courant continu alimenté par une batterie rechargeable de 16 Volts. L'énergie mécanique est transmise par un réducteur de type poulies-courroie suivi d'un système vis-écrou qui adapte cette énergie mécanique pour la prothèse (ensemble de liaisons entre le pied artificiel constitué d'une semelle en fibres de carbone et le manchon ou tibia artificiel). Des ressorts permettent d'ajuster également l'énergie mécanique fournie au pied artificiel. L'effort exercé par les ressorts est directement relié au couple exercé par l'actionneur.

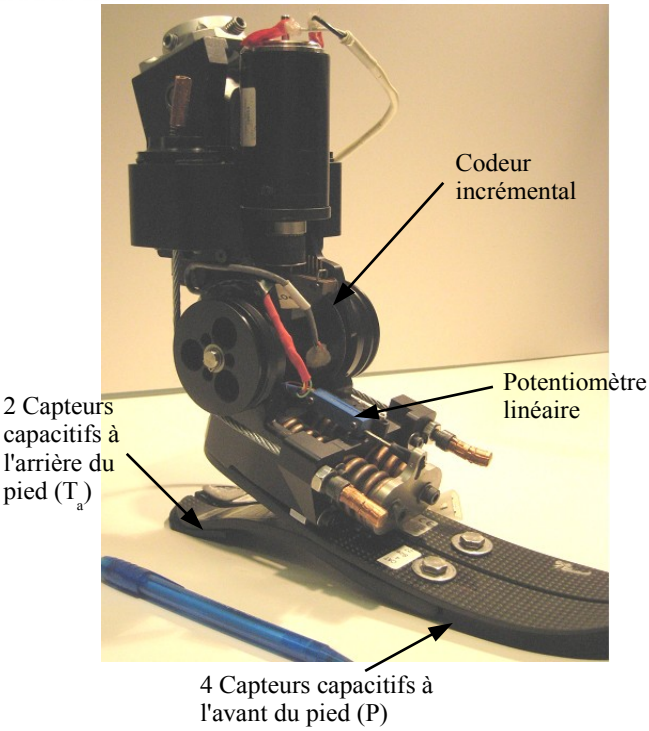




2 Chaîne d'informations

La chaîne d'informations est constituée d'un ensemble de capteurs permettant d'acquérir différentes informations :

- un potentiomètre linéaire qui mesure l'allongement/écrasement du ressort,
- un codeur incrémental placé au niveau de l'articulation pied/tibia,
- plusieurs capteurs capacitifs disposés sous la semelle du pied au niveau du talon T_a et à l'avant du pied P .



Les informations délivrées par les capteurs sont traitées par un calculateur qui élabore la commande en tension du moteur, u_M appliquée par l'amplificateur.

Cette commande est définie suivant deux modes hiérarchiques :

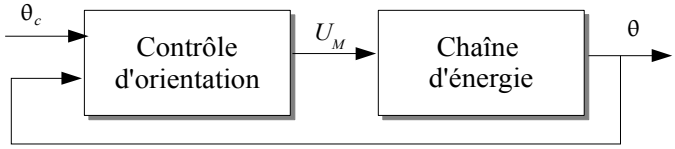
- le premier de niveau haut, définissant les modes de commande à adopter (choix du type d'asservissement)
- le deuxième de niveau bas, contrôlant le processus suivant l'asservissement défini.

Pour obtenir la loi de consigne $C_{th}(\theta)$ souhaitée, l'asservissement s'effectue en position ou en couple.

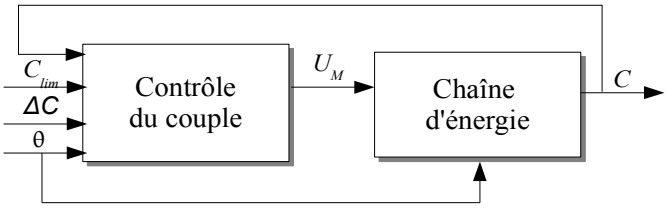
- Pendant la phase oscillante (le pied n'est plus en contact avec le sol), un asservissement de position est réalisé (contrôle d'orientation du pied).

- Pendant la phase d'appui, l'asservissement retenu doit permettre :
  - d'ajuster les pentes de la courbe $C_{th}(\theta)$ en fonction du signe de θ
  - d'ajouter un couple ΔC à partir du moment où le couple dépasse une valeur limite C_{lim} et ce jusqu'au moment où le pied n'est plus en contact avec le sol.

  On retient donc pour cette phase un pilotage en couple.

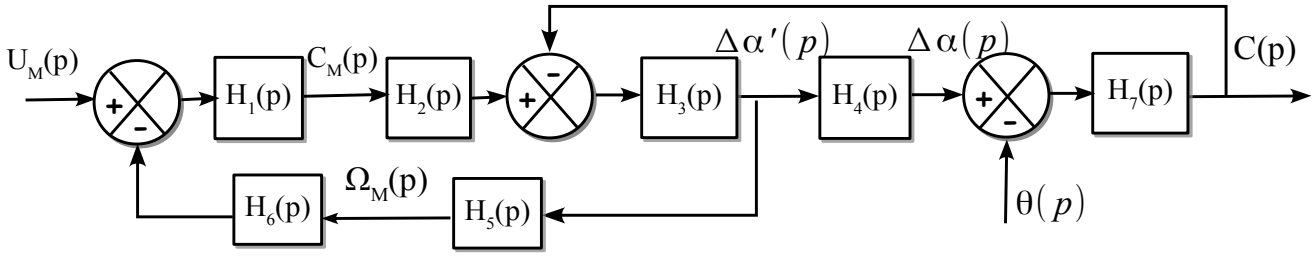


Mode de commande en orientation



Mode de commande en couple

Modélisation de la chaîne d'énergie (Annexe 3)



avec les grandeurs temporelles suivantes :

- u_M tension d'alimentation du moteur (V)
- C_M couple exercé par le moteur ($N \cdot m$)
- ω_M vitesse angulaire du moteur ($rad \cdot s^{-1}$)
- α angle de rotation du basculeur (rad) tel que $\alpha = \alpha_r + \Delta\alpha$ où α_r est la position repos et $\Delta\alpha$ est la variation angulaire autour de la position repos (voir annexe 5 ci-après). On a alors : $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\Delta\alpha}{dt}$. On note $\Delta\alpha'(p)$ la transformée de Laplace de $\frac{d\Delta\alpha}{dt}$
- θ angle de rotation du pied (rad) tel que $\theta = 0\,rad$ pour la position repos
- C couple exercé par le pied ($N \cdot m$).

On note en majuscule, lorsque cela est possible, les variables associées aux grandeurs temporelles dans le domaine symbolique.

Caractéristiques du moteur à courant continu (Annexe 4)

Moteur Maxon RE40

Tension maximale u_{max} : 16 V	Résistance R : 1 Ω
Vitesse angulaire maximale sans charge N_{max} : $7600\,tr \cdot min^{-1}$	Constante de couple k_c : $0,02\,N \cdot m \cdot A^{-1}$
Couple maximal (pic) C_{max} : 2,5 $N \cdot m$	Constante de fcem $k_e = k_c$: $0,02\,V \cdot s$
Courant sans charge : 0,07 A	Inertie du rotor J_M : $1,34.10^{-5}\,kg \cdot m^2$

Paramétrage de la prothèse (Annexe 5)

- Le repère $R_0(O,\vec{x},\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est lié au tibia noté 0 fixe dans toutes nos études. Ce repère est supposé galiléen (hypothèse justifiée dans le sujet).
- Le repère $R_1(O,\vec{x},\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est lié au pied artificiel noté 1, supposé indéformable. On note $\theta(t)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)=(\vec{z}_0,\vec{z}_1)$ l'angle de rotation du pied par rapport au tibia. D'autre part, le vecteur unitaire $\vec{n}_1$ définit la direction des ressorts avec $\delta=(\vec{y}_1,\vec{n}_1)$ considéré comme constant tout au long du cycle de marche.
- Le repère $R_2(O,\vec{x},\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ est lié au basculeur noté 2. On note $\alpha(t)=(\vec{y}_0,\vec{y}_2)=(\vec{z}_0,\vec{z}_2)$ l'angle de rotation du basculeur par rapport au tibia.
- Le repère $R_3(A,\vec{x},\vec{y}_3,\vec{z}_3)$ est lié au vérin électrique 3. On note $\beta(t)=(\vec{y}_0,\vec{y}_3)=(\vec{z}_0,\vec{z}_3)$ l'angle de rotation du vérin électrique par rapport au tibia. Le vérin électrique comporte une tige notée 3_1 et un corps noté 3_2.

On pose : $\overrightarrow{OA}=a\vec{z}_0$, $\overrightarrow{BA}=\lambda(t)\vec{y}_3$, $\overrightarrow{BO}=b\vec{y}_2$, $\overrightarrow{SO}=b\vec{z}_2$ avec $b=0,039\,\text{m}$ et $a=0,117\,\text{m}$

En l'absence d'action sur la prothèse, une position repos est identifiée par les paramètres θ_R, α_R et δ_R. Cette position est notamment obtenue lorsque le tibia est vertical et que le pied est en appui horizontalement sur le sol. Les valeurs numériques sont alors : $\theta_R=0°$, $\alpha_R=9°$ et $\delta_R=\delta=-17°$.

Afin de linéariser le comportement autour de la position repos, on écrira le cas échéant :

- $\alpha=\alpha_R+\Delta\alpha$
- $\theta=\theta_R+\Delta\theta=\Delta\theta$ avec $\Delta\alpha$ et $\Delta\theta$ les variations angulaires autour de la position repos.

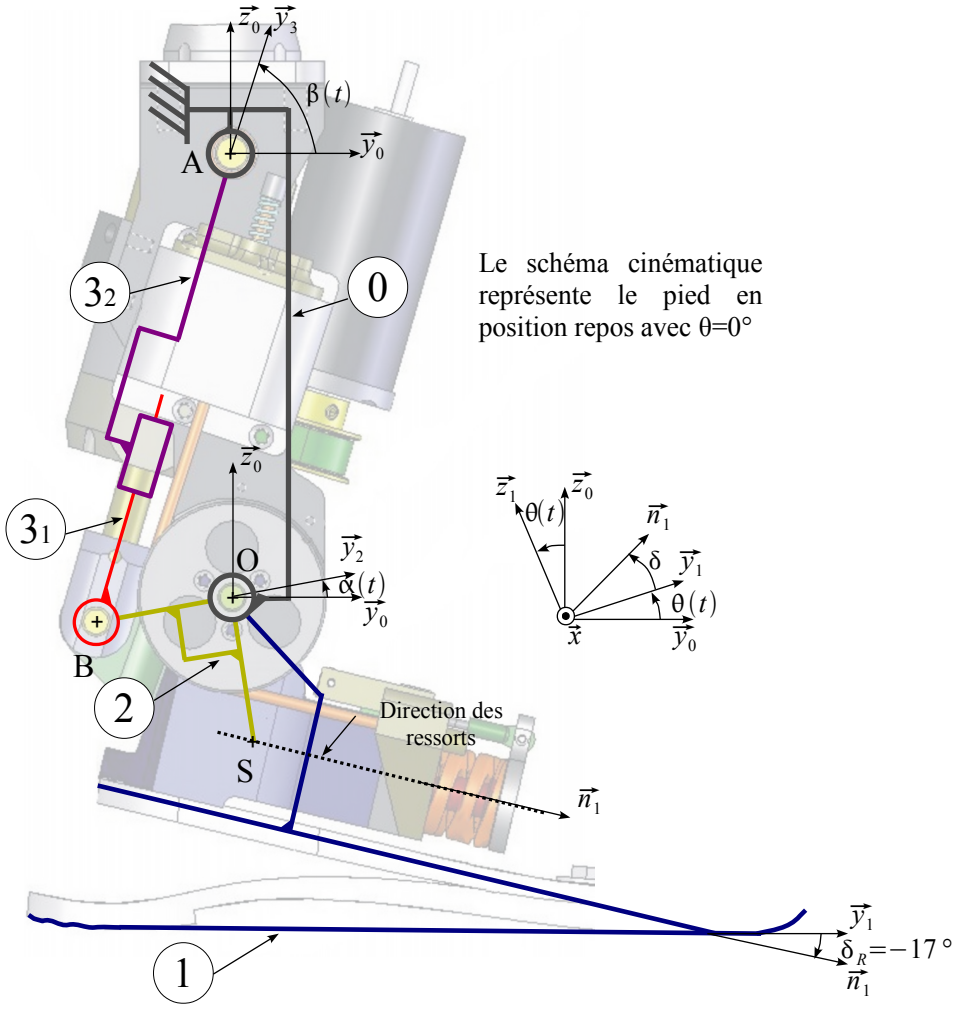
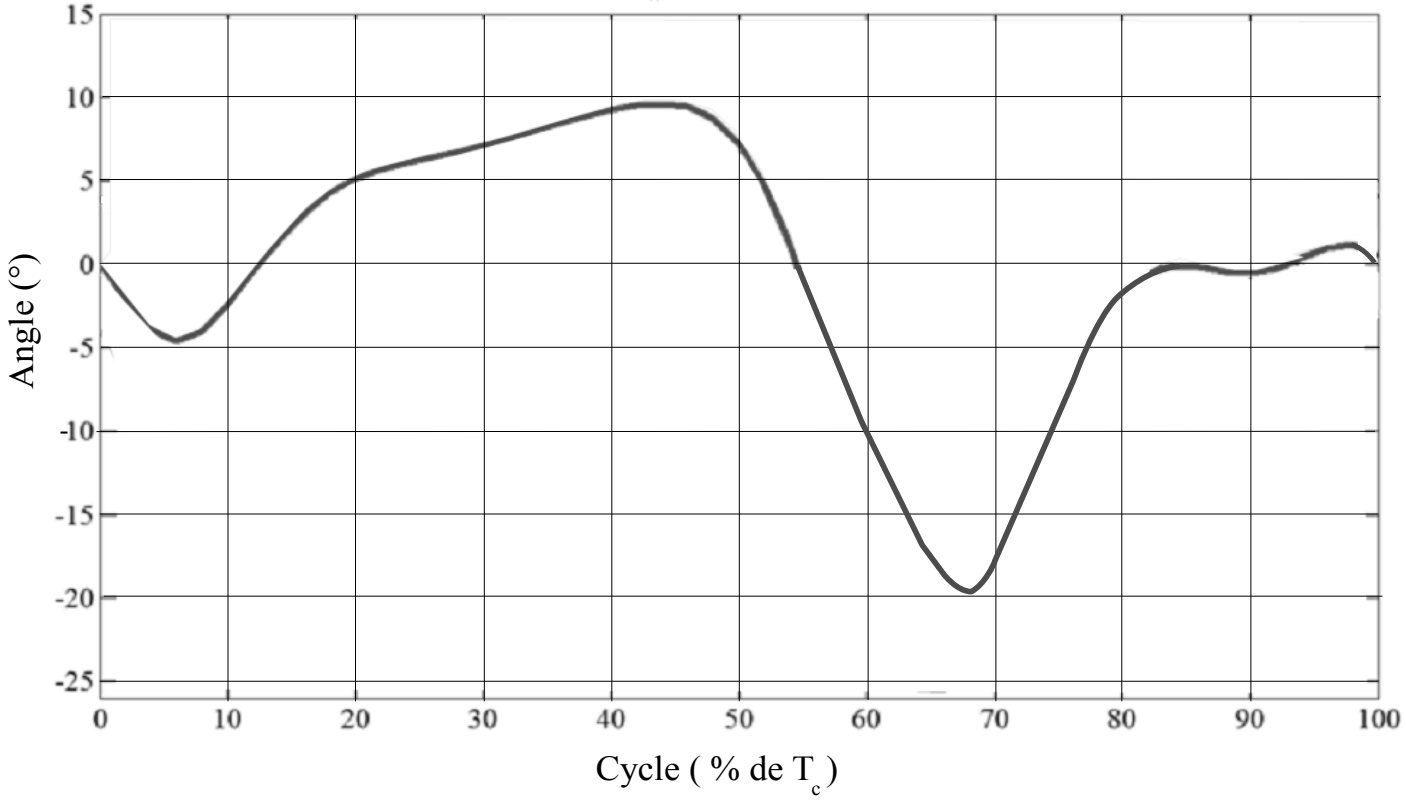


Schéma cinématique de la prothèse en position repos

Analyse de l'ensemble transtibial lors de la marche

Question 1.



Détermination de $\left|\frac{d\theta}{dt}\right|_{max}$

$\left|\frac{d\,\theta}{dt}\right|_{max} =$

Définition du cahier des charges

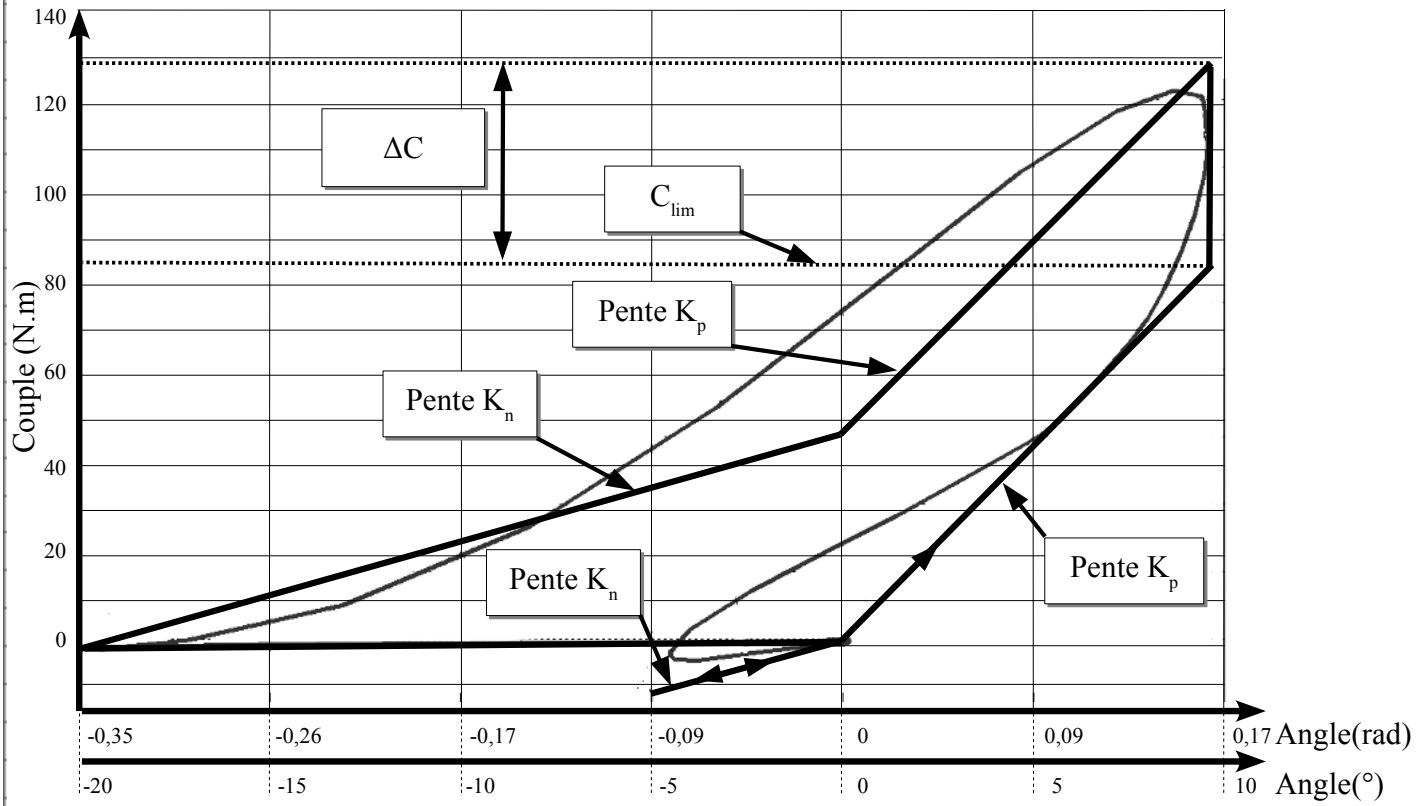
Question 2.

Critères	**Valeurs du CDC**	**Valeurs relevées**
Valeurs extrêmes de l'angle θ	Flexion plantaire propulsive : - 25 ° Dorsiflexion : 15 °	
Vitesse angulaire maximale $\dot{\theta}_{max}$	5,2 $rad.s^{-1}$	
Couple maximal à fournir	140 N.m	
Travail maximal à fournir	20 J	

Conclusion :

Définition de la loi de consigne

Question 3.



Comparaison des lois théorique et expérimentale pour une cadence normale

K_n = K_p = C_{lim} = ΔC =

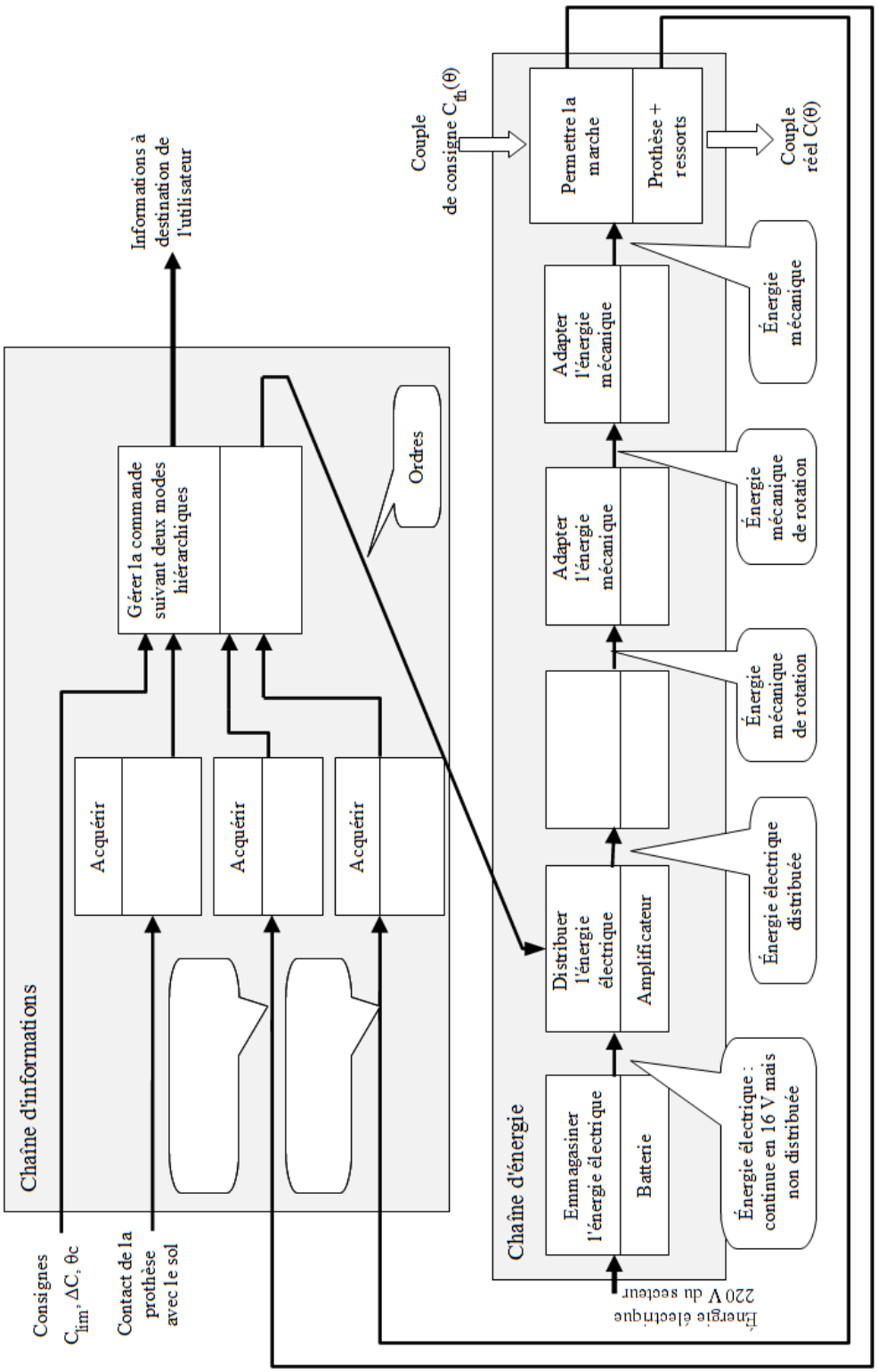
Expression littérale de W_{th} =

A.N. : W_{th} =

Conclusion :

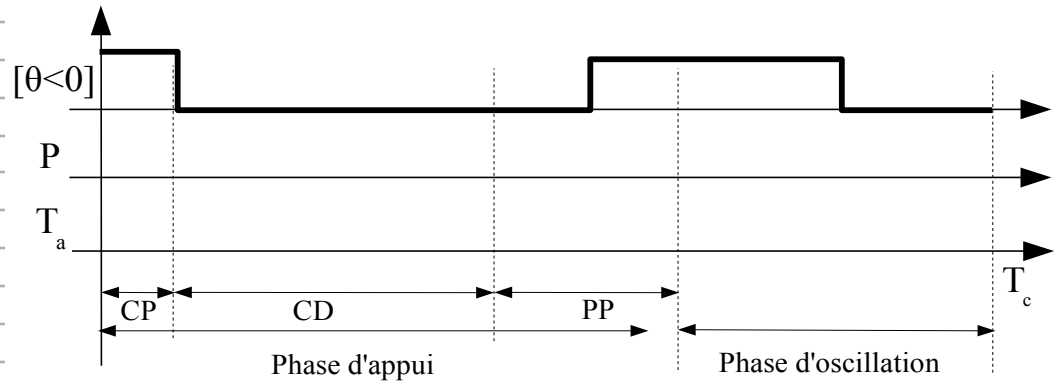
Organisation structurelle de la prothèse

Question 4.



Gestion des modes de commande

Question 5.

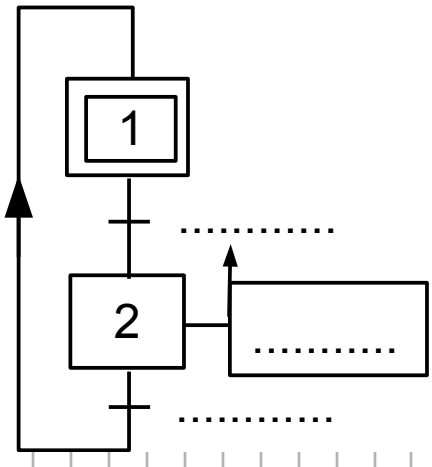


C_1=

C_2=

Cor=

Question 6.

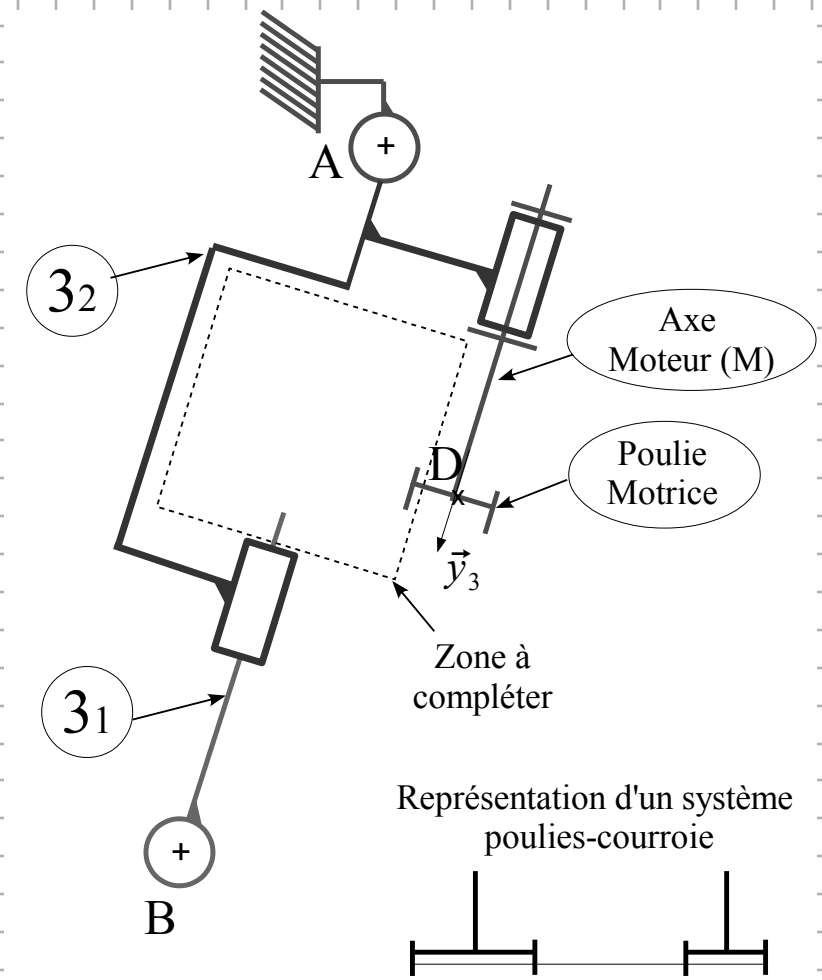


Modélisation de la chaîne de transmission

Question 7.

$K_G =$

Question 8.



Représentation d'un système
poulies-courroie

Question 9. $H_4(p) =$ $H_5(p) =$

A.N. : $R_T =$

$\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|_{max} = \left|\frac{d\theta}{dt}\right|_{max} =$

Conclusion :

Modélisation du comportement inertiel du pied artificiel

Question 10.

Question 11.

Comportement dynamique de la prothèse

Question 12.

Question 13.

$H_7(p) =$

Question 14.

Question 15.

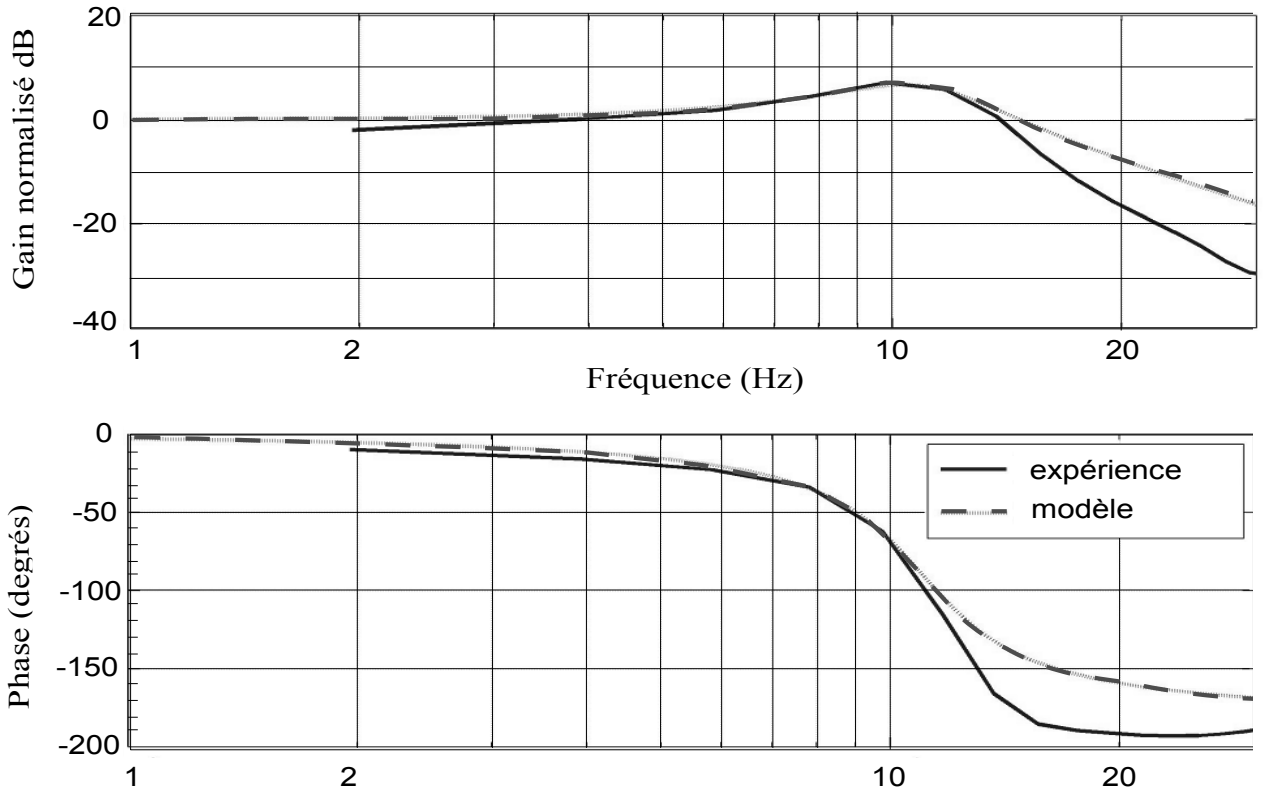
Question 16.

$H_1(p) =$ $H_2(p) =$ $H_3(p) =$ $H_6(p) =$

Identification d'un modèle de comportement de la chaîne d'énergie

Question 17.

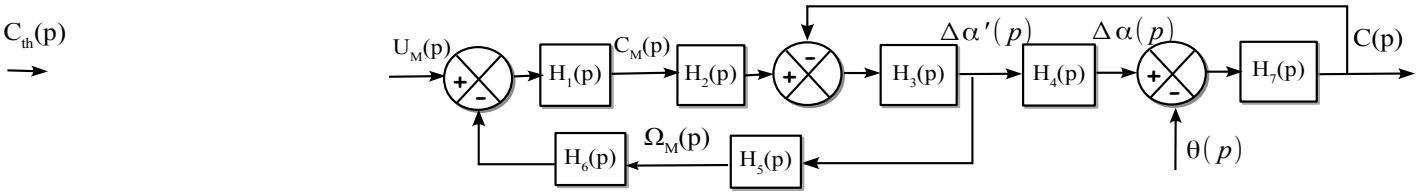
Question 18.



Question 19.

Mise en place de l'asservissement en couple

Question 20.

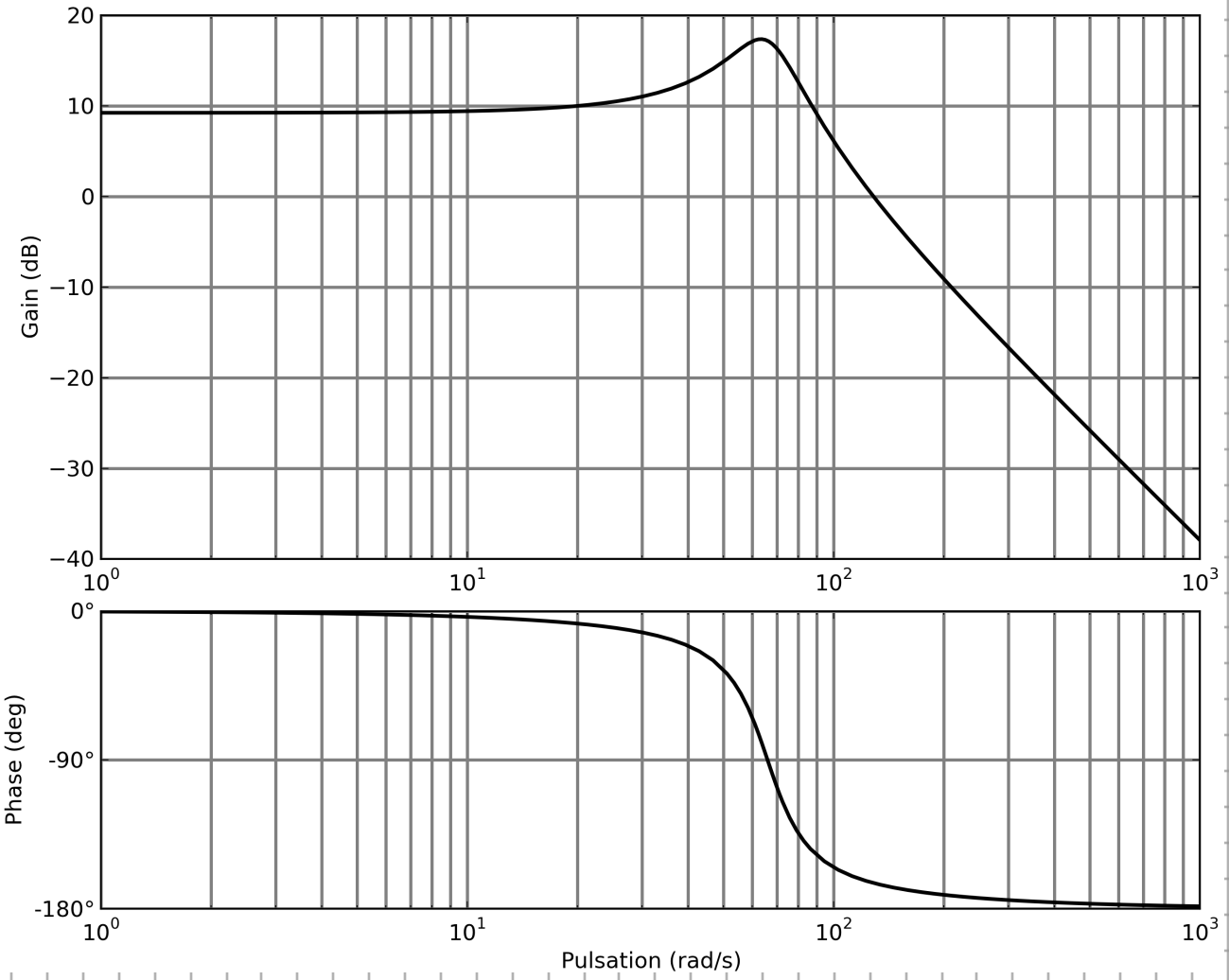


Expression du bloc d'adaptation K_A

Analyse des performances de l'asservissement de couple

Question 21.

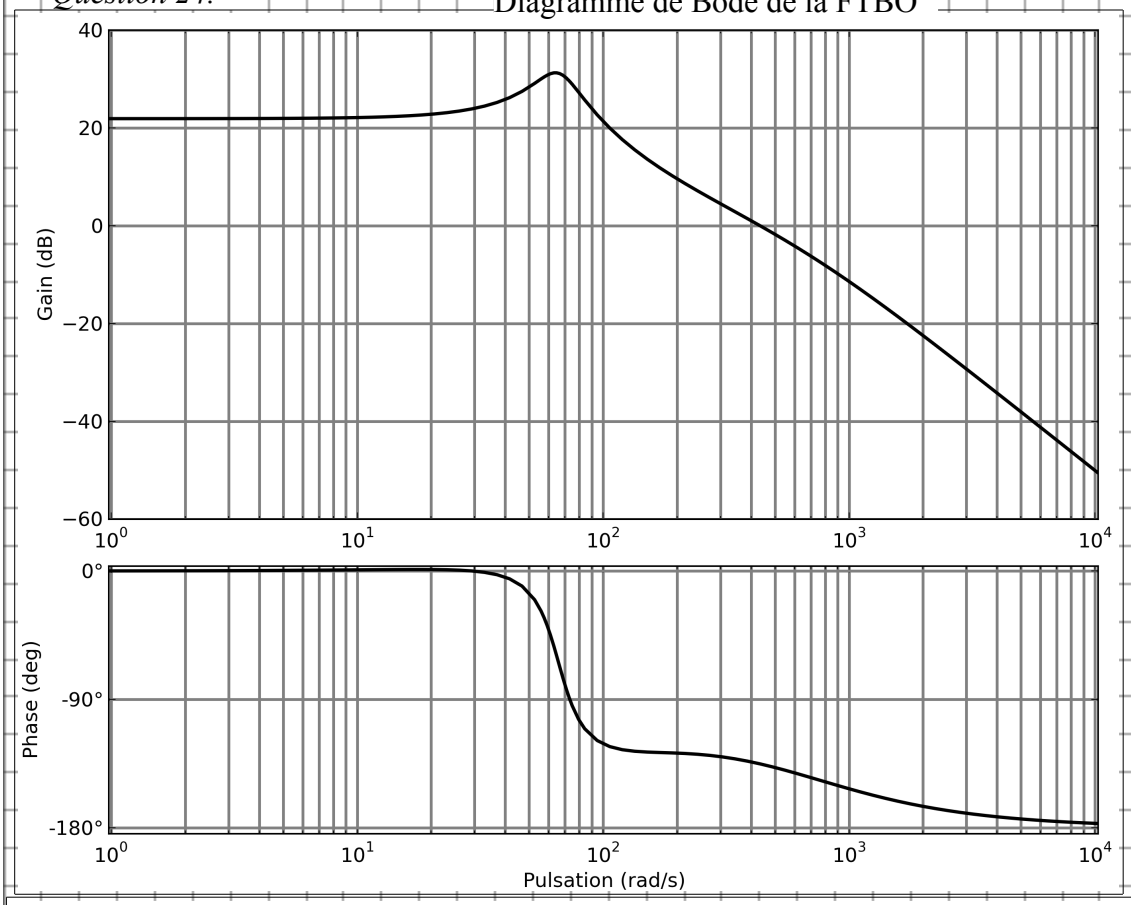
Question 22.



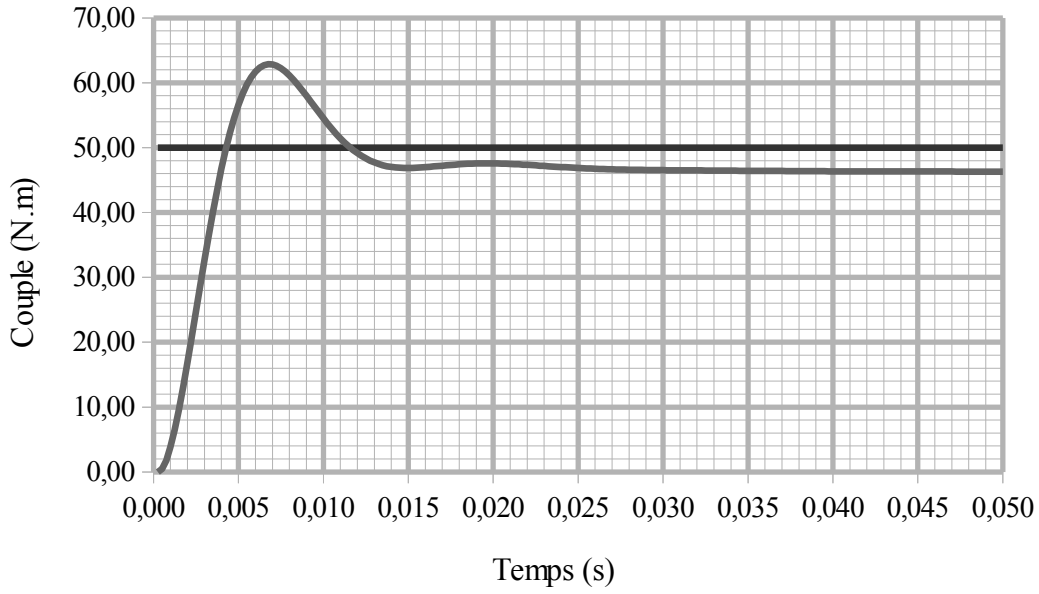
Question 23.

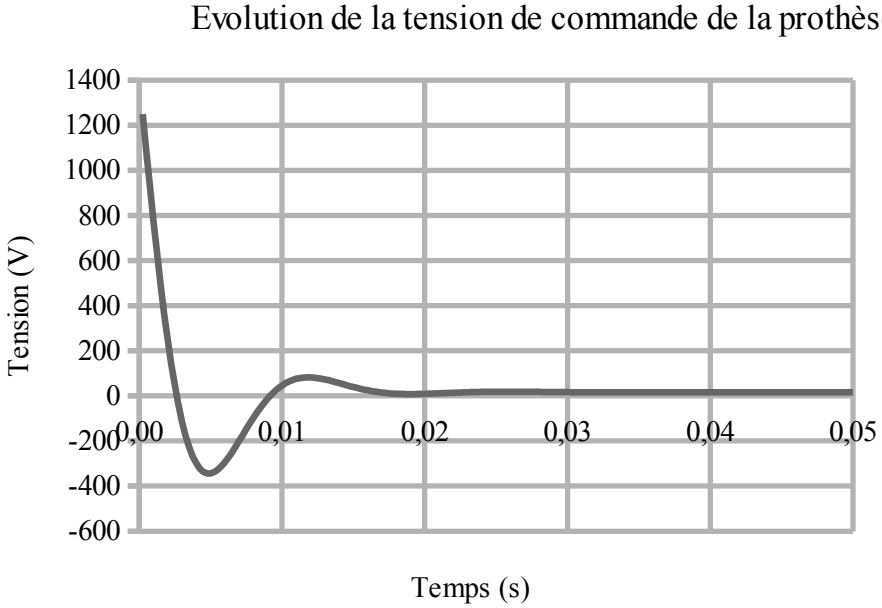
Question 24.

Diagramme de Bode de la FTBO



Réponse indicielle (Echelon de couple de 50 N.m)





Validation clinique de la prothèse active

Question 25.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Ingénierie système : besoin, exigences et diagrammes SysML
- Architecture fonctionnelle et structurelle : chaînes d'information et de puissance
- Cinématique des mécanismes : composition des mouvements, contact ponctuel, lois entrée-sortie et fermetures
- Géométrie des masses : centre d'inertie, matrice d'inertie, théorème de Huygens
- Énergétique : puissances, théorème de l'énergie cinétique, rendement
- Modèles de comportement et réponse temporelle : premier ordre, second ordre, identification
- Modélisation des systèmes asservis : structure, SLCI, transformée de Laplace, schéma-blocs
- Performances des systèmes asservis : stabilité, précision, rapidité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/psi