Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2019, filière PSI

Physique 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I, section A : pressions négatives
- Partie I, section B : conductance hydraulique
- Partie I, section C : le cavitron
- Partie II, section A : chute d'un arbre mort
- Partie II, section B : chute d'un arbre vivant sous l'effet du vent

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/psi/2019/physique2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A2019 – PHYSIQUE II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Physique des arbres

Dans tout le problème, *exprimer* ou *déterminer* une grandeur signifie en donner une expression littérale. En revanche *calculer* une grandeur signifie en donner une valeur numérique avec au plus deux chiffres significatifs. Les vecteurs sont surmontés d'une flèche ($\vec{g}$) dans le cas général ou d'un chapeau s'ils sont unitaires ($\|\widehat{u}_z\| = 1$).
Dans tout le problème le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\widehat{u}_z$ est uniforme et le référentiel terrestre galiléen. Les données numériques utiles ainsi qu'un formulaire sont rassemblés en fin d'énoncé.

I. — Physique du cavitron

En phase liquide, les molécules exercent entre elles des forces attractives (assurant entre autres la cohésion du liquide) qui permettent au liquide de supporter des forces de traction équivalentes à des pressions négatives.

La vie d'un arbre suppose une montée efficace de la sève (assimilée dans toute la suite à de l'eau) sur une hauteur qui peut atteindre quelques dizaines de mètres. Ceci conduit à l'existence de zones de pression négative, où l'état liquide de l'eau est métastable : sous l'effet d'une petite perturbation, des bulles de vapeur d'eau peuvent se former. Ceci se produit significativement lorsqu'un arbre subit un stress hydrique associant une forte évaporation (due à un fort ensoleillement) et une faible ressource en eau (due à des sols désséchés). La circulation de la sève est alors gênée par la formation de bulles de gaz au sein de l'écoulement. Pour tester quantitativement la sensibilité des espèces au stress hydrique, des chercheurs de l'INRA ont mis au point un dispositif appelé CAVITRON.

I.A. — Pressions négatives

❏ **1** — Exprimer la pression p dans un arbre assimilé à une colonne d'eau verticale emprisonnée dans un tube fermé au sommet, supposée en équilibre mécanique sous l'effet des seules forces de pression et de pesanteur, en fonction de la masse volumique ρ_e de l'eau, de la cote z mesurée à partir du sol, de l'intensité de la pesanteur g et de la pression p_0 imposée par l'atmosphère au niveau du sol via les racines. Calculer l'altitude z_m à partir de laquelle la pression devient négative. Commenter la valeur obtenue.

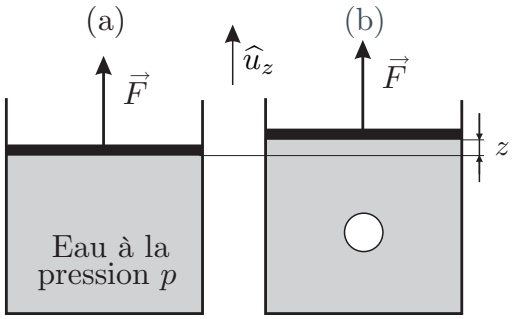


FIGURE 1 – Cylindre vertical

Pour les questions 2 à 5 on ne prendra en compte ni $\vec{g}$ ni p_0. Sur la figure 1(a), on envisage un volume V d'eau en équilibre dans un cylindre d'axe $(O,\widehat{u}_z)$ et de section S, fermé par un piston de surface S et de masse nulle sur lequel un opérateur exerce lentement une force de traction $\vec{F} = F\,\widehat{u}_z$ avec $F > 0$ et $\widehat{u}_z$ vertical ascendant.

❏ **2** — Exprimer la pression dans l'eau en fonction de F et S. Quel est son signe ?

L'opérateur veut créer au sein de l'eau liquide, une bulle de vapeur d'eau sphérique de rayon r en tirant le piston sur une hauteur z et en maintenant la force $\vec{F}$ constante 1(b). On néglige la quantité d'eau contenue dans la bulle devant V, ce qui revient à l'assimiler à une bulle de vide.

❏ **3** — On considère le système constitué d'une bulle vide de rayon r et de l'interface qui la sépare de l'eau à la pression p. Exprimer le travail infinitésimal δW_p des forces de pression quand le rayon de la bulle passe de r à $r + \mathrm{d}r$. En déduire l'expression de la contribution des forces pressantes à l'énergie potentielle E_p du système.

On admet qu'il convient d'ajouter à cette énergie potentielle une énergie potentielle de tension superficielle de la forme $\gamma_e\,\Sigma$ où Σ est l'aire de l'interface entre l'eau liquide et l'eau vapeur et où la constante positive γ_e est le coefficient de tension superficielle de l'eau.

❏ **4** — Montrer que l'énergie potentielle totale du système s'exprime sous la forme d'un polynôme de degré 3 en r dont on précisera les coefficients. Montrer qu'elle admet un maximum en $r_c = -2\gamma_e/p$. On pose $x = r/r_c$ et $E_a = E_p(r_c)$. Calculer r_c et E_a pour $p = -2{,}0\,\text{MPa}$. Tracer la courbe $\epsilon(x) = E_p(x)/E_a$ pour $x \in [0{,}2]$.

❏ **5** — Ce modèle n'est évidemment valide que pour $r < r_b$ où r_b est le rayon de la bulle que l'on considèrera égal à $2r_c$. Montrer que dans le cadre de ce modèle, l'état liquide sans bulle est un état d'équilibre stable mais qu'il n'est pas le plus stable : on dit qu'il est métastable. Quelle énergie faut-il apporter au système pour qu'il évolue spontanément vers l'équilibre le plus stable ? Quel est cet état ? Cette évolution est-elle envisageable si $p = -2{,}0\,\text{MPa}$?

I.B. — Conductance hydraulique

On envisage un écoulement d'eau, de masse volumique ρ_e et de viscosité dynamique η_e, dans un tuyau cylindrique d'axe $(O,\widehat{u}_x)$ horizontal, de longueur $2R$ et de section circulaire de rayon a. Les faces d'entrée et de sortie de ce cylindre sont centrées sur les points $A_1(x = -R)$ et $A_2(x = R)$ de l'axe $(O,\widehat{u}_x)$ où l'on impose respectivement des pressions p_1 et p_2. L'ensemble est représenté sur la figure 2(a). On repère un point M dans l'eau par ses coordonnées cylindriques (r,θ,x) d'axe $(O,\widehat{u}_x)$, avec $-R < x < R$, $0 < r < a$ et $0 < \theta < 2\pi$. Lorsque l'on impose une différence de pression $p_1 - p_2$ positive et constante, un écoulement d'eau incompressible et stationnaire apparaît. Cet écoulement est décrit par un champ des vitesses $\vec{v} = v(r,x)\,\widehat{u}_x$ indépendant de θ et un champ de pression $p(x)$ indépendant de r et θ.

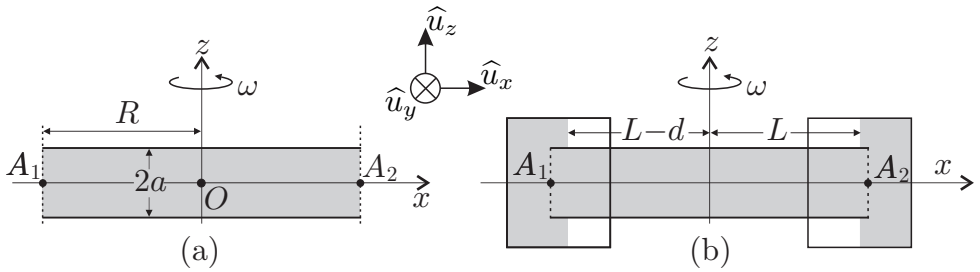


FIGURE 2 – Cylindre horizontal

Dans toute la partie **I.B**, on considère ce cylindre sans rotation, soit $\omega = 0$.

❏ **6** — Montrer que $v(r,x)$ est indépendant de x. On le notera $v(r)$ dans la suite.

On s'intéresse au système fermé $(\mathscr{S}_r)$ constitué du fluide compris à l'instant t dans le cylindre d'axe $(O,\widehat{u}_x)$ et de rayon $r < a$, entre les abscisses x et $x + dx$. Le fluide situé au delà de r exerce sur la surface latérale de $(\mathscr{S}_r)$ une force surfacique tangentielle de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}S} = \epsilon\,\eta_e\,\frac{\partial v}{\partial r}\widehat{u}_x \text{ où } \eta_e \text{ est la viscosité dynamique de l'eau et } \epsilon = \pm 1.$$

❏ **7** — Indiquer, en justifiant qualitativement la réponse, le choix du signe de ϵ correspondant à la situation étudiée. Exprimer la résultante des forces de viscosité sur $(\mathscr{S}_r)$. Justifier *sans calcul* que la quantité de mouvement du système $(\mathscr{S}_r)$ est indépendante du temps. En déduire la relation :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{2\,\eta_e}{r}\,\frac{\partial v}{\partial r}$$

Justifier le fait que $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ est une constante. En déduire l'expression de $p(x)$ en fonction de p_1, p_2, x et R.

On définit la conductance hydraulique $G_H = \dfrac{D_V}{p_1 - p_2}$ du tuyau, où D_V est le débit volumique.

❏ **8** — Déduire des questions précédentes l'expression de $v(r)$ en fonction de r, η_e, p_1, p_2, a et R. Exprimer G_H en fonction de η_e, R et a.

❏ **9** — Exprimer la vitesse moyenne $\overline{v} = \dfrac{D_V}{\pi a^2}$ en fonction de a, p_1, p_2, R et η_e. Vérifier que la force de viscosité subie par la tranche d'eau située à l'instant t dans le tuyau entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ s'écrit :

$$\mathrm{d}\vec{F} = -\,8\pi\,\eta_e\,\overline{v}\,\mathrm{d}x\,\widehat{u}_x \qquad (1)$$

❏ **10** — Calculer $\overline{v}$ et le nombre de REYNOLDS Re pour $a = 0{,}02$ mm (rayon typique des canaux dans lesquels la sève s'écoule), $p_1 - p_2 = 10^5$ Pa et $R = 0{,}4$ m. Que peut-on en conclure sur la nature de l'écoulement ?

I.C. — Le cavitron

Pour tester les effets du stress hydrique sur la conductance, on coupe une branche d'arbre quasi-rectiligne de longueur $2R$ que l'on met en communication avec deux récipients contenant de l'eau, non représentés sur la figure 2(a), dans des conditions telles que la pression aux extrémités $x = -R$ et $x = +R$ de la branche vaut toujours $p_1 = p(x = -R)$ et $p_2 = p(x = +R)$. On fait maintenant tourner l'ensemble autour de l'axe $(O,\widehat{u}_z)$ avec une vitesse angulaire $\omega > 0$ constante et suffisamment élevée pour que la pesanteur soit négligeable dans l'écoulement. On assimile la branche à un unique canal cylindrique d'axe $(O,\widehat{u}_x)$ et de rayon a dans lequel s'écoule la sève toujours assimilée à de l'eau.

❏ **11** — On étudie le mouvement de l'eau dans le référentiel $(\mathscr{R}_b)$ solidaire de la branche. Soit une particule de fluide de masse $\mathrm{d}m = \rho_e \mathrm{d}\tau$, d'abscisse x et de vecteur vitesse $v\,\widehat{u}_x$ dans le référentiel $(\mathscr{R}_b)$. On admet que la rotation de la branche agit sur le mouvement de cette particule par l'intermédiaire de deux forces volumiques $\vec{f}_{\mathrm{i},1} = \rho_e \omega^2 x\,\widehat{u}_x$ et $\vec{f}_{\mathrm{i},2} = -2\rho_e \vec{\omega} \wedge \vec{v}$. Vérifier l'homogénéité de ces formules et représenter ces forces volumiques sur une figure dans deux cas d'abscisses opposées. Citer un exemple de la vie courante dans lequel la force $\vec{f}_{\mathrm{i},1}$ peut être ressentie.

On adopte désormais pour l'écoulement de l'eau dans la branche d'arbre en rotation un modèle semblable à celui introduit à la question 9. On fait l'hypothèse que le champ de pression ne dépend que de x, que l'écoulement est uniforme de vitesse $\overline{v}\,\widehat{u}_x$ et que la paroi exerce sur la tranche de fluide située entre x et $x + \mathrm{d}x$ une force de viscosité donnée par la relation (1).

❏ **12** — Montrer que la pression dans le domaine $x > 0$ s'écrit :

$$p(x > 0) = p_2 - \frac{\rho_e\,\omega^2\,(R^2 - x^2)}{2} - \frac{8\,\eta_e\,\overline{v}\,(x - R)}{a^2}$$

On montre de manière analogue (travail non demandé) que :

$$p(x < 0) = p_1 - \frac{\rho_e\,\omega^2\,(R^2 - x^2)}{2} - \frac{8\,\eta_e\,\overline{v}\,(x + R)}{a^2}$$

❏ **13** — En déduire les expressions de $p(x = 0)$ et $\overline{v}$ en fonction de p_1, p_2, ρ_e, η_e, ω et R. Vérifier que la rotation est sans effet sur la conductance hydraulique G_H de la branche.

Pour imposer les pressions p_1 et p_2, on place aux extrémités de la branche des réservoirs remplis partiellement d'eau avec des quantités légèrement différentes. Ces réservoirs sont solidaires de la branche en rotation à vitesse angulaire ω.

Lorsque l'équilibre est établi, la surface libre de l'eau dans les réservoirs devient verticale du fait des forces d'inertie. La branche, les réservoirs et la présence d'eau indiquée en gris sont représentés sur la figure 2(b).
On crée des ouvertures – non représentées sur la figure 2(b) – dans les réservoirs vers l'atmosphère, de telle sorte que l'air – qui occupe la partie des réservoirs non occupée par l'eau – impose la pression p_0 respectivement en $x_1 = -L + d$ et en $x_2 = L$ avec $L < R$ et $0 < d \ll L$. On mesure alors par une méthode optique le débit volumique en suivant l'évolution de la surface libre de l'eau dans l'un des réservoirs. Cette évolution est suffisamment lente au cours de l'expérience pour que l'on puisse supposer que les pressions p_1 et p_2 sont constantes.

❏ **14** — Exprimer p_1 et p_2 en fonction de ρ_e, p_0, ω, L, R et d en supposant que l'eau est quasiment en équilibre relatif dans les réservoirs tournants. Vérifier que $p_1 - p_2 = \rho_e\,\omega^2\,L\,d$ dans l'approximation $d \ll L$.

La figure 3 représente l'allure du graphe de la perte de conductance relative

$$\delta_G = 1 - \frac{G_H(\omega)}{G_H(\omega = 0)}$$

en fonction du paramètre $\Delta p = -\,\rho_e\,\omega^2\,L^2$ mesuré en mégapascals dans un CAVITRON tel que $d = 1$ cm, $L = 0{,}3$ m pour une branche telle que $R = 0{,}4$ m.

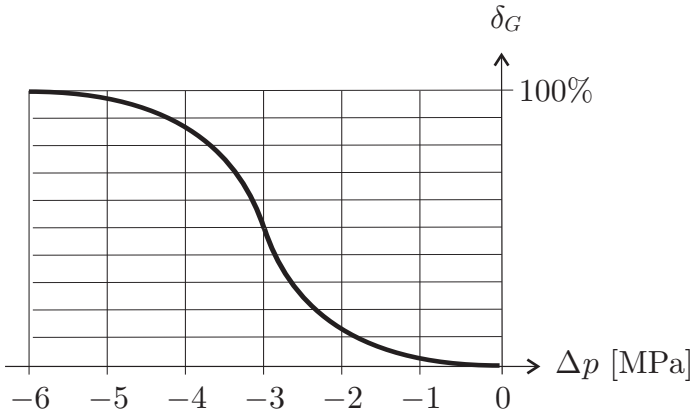


FIGURE 3 – Perte de conductance relative

❏ **15** — Calculer la valeur de ω permettant de faire baisser la conductance de 50 %, valeur choisie comme limite « objective » du stress hydrique par les chercheurs de l'INRA. Calculer la valeur correspondante de la pression $p_1 - p_2$. Proposer une interprétation sommaire de la baisse de conductance hydraulique lorsque des bulles de gaz se forment.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Chute d'arbres

II.A. — Chute d'un arbre mort

Un bûcheron assimilé à un point matériel B de masse m souhaite abattre un arbre mort assimilé à un cylindre homogène de masse M avec $M > m$, de hauteur H et de section droite carrée de côté $2a$ représenté sur la figure 4(a).

Il tire pour celà sur un câble fixé en C à l'arbre, de longueur $BC = \ell$ et de masse négligeable, afin de faire tourner l'arbre autour de l'axe $(O,\widehat{u}_y)$ dirigé par le vecteur $\widehat{u}_y = \widehat{u}_z \wedge \widehat{u}_x$.

L'arbre étant mort, on néglige l'action de ses racines, de telle sorte qu'au moment où l'arbre commence à tourner, les actions de contact qu'il subit se limitent à une force $\vec{R}_1 = T_1\,\widehat{u}_x + N_1\,\widehat{u}_z$ appliquée au point O et satisfaisant aux lois de COULOMB avec un coefficient de frottement f. De même les actions du sol sur le bûcheron sont décrites par une force $\vec{R}_2 = T_2\,\widehat{u}_x + N_2\,\widehat{u}_z$ appliquée au point B et satisfaisant aux lois de COULOMB avec le même coefficient de frottement f. Les composantes T_1, N_1, T_2 et N_2 ont des valeurs algébriques. Le câble est supposé tendu. On note $\vec{F}$ la force exercée par le câble sur l'arbre au point C, supposée parallèle au câble et F sa norme. Les angles sont orientés positivement dans le sens trigonométrique autour de $(O,\widehat{u}_y)$ et on note α l'angle (positif) entre $\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{BC}$.

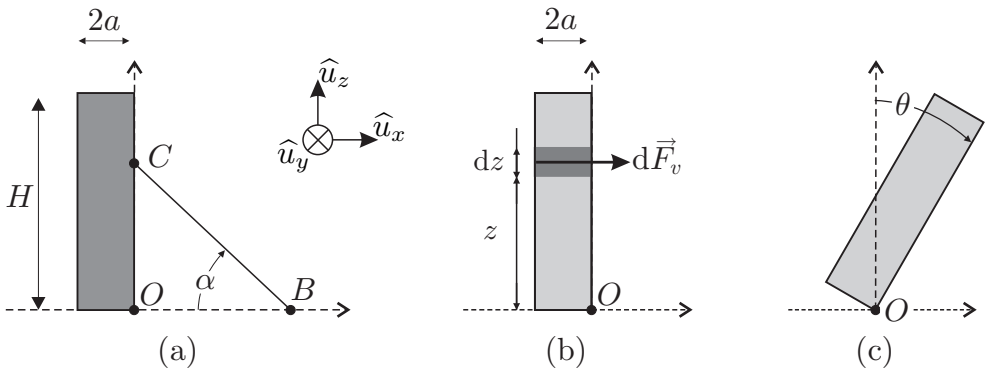


FIGURE 4 – Chute d'un arbre

❏ **16** — Le bûcheron est supposé ne pas glisser dans la situation initiale décrite par la figure 4(a). Exprimer N_2 et T_2 en fonction de F, α, m et g. En déduire l'expression de la valeur maximale $F_{\max}$ de F en fonction de f, m, g et α.

❏ **17** — L'arbre est supposé au repos dans la situation initiale décrite par la figure 4(a). Exprimer N_1 et T_1 en fonction de F, α, M et g. En déduire que pour $0 \leq F \leq F_{\max}$ le glissement n'est pas possible en O.

❏ **18** — Exprimer le moment Γ_g du poids de l'arbre par rapport à l'axe $(O,\widehat{u}_y)$ dans la situation initiale décrite par la figure 4(a).

❏ **19** — Soit Γ_B le moment par rapport à l'axe $(O,\widehat{u}_y)$ exercé par le bûcheron sur l'arbre via le câble. Quelle est la valeur minimale de Γ_B permettant à l'arbre de pivoter autour de l'axe $(O,\widehat{u}_y)$?

❏ **20** — En supposant F constant, justifier (*avec ou sans calculs, mais rigoureusement*) qu'il existe une valeur optimale α_m de l'angle α.

On suppose que, quelque soit l'angle α, l'action du bûcheron est telle que l'on est à la limite du glissement : F prend la valeur $F_{\max}$.

❏ **21** — Montrer que le moment Γ_B par rapport à l'axe $(O,\widehat{u}_y)$ exercé par le bûcheron via le câble s'écrit $\Gamma_B = \dfrac{mg\ell}{\phi(\alpha)}$ avec $\phi(\alpha) = \dfrac{1}{f\sin\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha}$. En déduire l'expression de α_m en fonction de f. Vérifier que $\alpha_m = \frac{\pi}{4}$ pour $f = 1$.

❏ **22** — On donne $M = 10^3$ kg, $H = 20$ m, $a = 0{,}5$ m, $m = 10^2$ kg et $f = 1$. Calculer la force $F_{\max}$ et la longueur de corde ℓ nécessaires pour initier la rotation de l'arbre. Commenter.

On suppose que l'arbre a commencé sa rotation autour de l'axe $(O,\widehat{u}_y)$, repérée par l'angle θ que fait $\overrightarrow{OC}$ avec $(O,\widehat{u}_z)$.

❏ **23** — Après avoir fait une figure représentant la situation et faisant apparaître les différents paramètres, exprimer l'énergie potentielle de pesanteur E_p de l'arbre en fonction de M, g, H, a et θ. Le bûcheron opère de manière quasi-statique c'est-à-dire sans communiquer d'énergie cinétique à l'arbre. À partir de quel angle θ_s peut-il lâcher le câble ?

II.B. — Chute d'un arbre vivant sous l'effet du vent

Dans cette partie, on s'intéresse à la chute d'un arbre vivant, de hauteur H, sous l'effet d'un coup de vent violent. On néglige le rôle du poids de l'arbre : son mouvement résulte uniquement d'une compétition entre l'action du sol via les racines et l'action du vent.

❏ **24** — Proposer un ordre de grandeur de la vitesse U pour un vent violent. En évaluant un nombre sans dimension que l'on définira pour un arbre de section carrée de côté $2a = 1$ m, justifier qu'il convient de décrire l'action d'un vent soufflant dans la direction $\widehat{u}_x$ sur une tranche d'arbre (supposé vertical à ce stade) comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$, figure 4(b), par une force élémentaire de la forme $\mathrm{d}\vec{F}_v = 2aC_x\rho_a U^2 \mathrm{d}z\widehat{u}_x$ où ρ_a est la masse volumique de l'air et C_x un coefficient aérodynamique..

❏ **25** — L'arbre étant vertical, exprimer le moment total Γ_v des actions du vent par rapport à l'axe $\widehat{u}_y$ en fonction de C, ρ_a, a, H et U.

❏ **26** — Lorsque l'arbre commence à pencher, on repère son mouvement par l'angle θ représenté sur la figure 4(c). Le moment Γ_v varie en fonction de θ et on constate que $\Gamma_v(\theta)$ est proportionnel à $(\cos\theta)^n$ avec n entier. Proposer une valeur de l'entier n en justifiant votre réponse.
Dans toute la suite, on omet la dépendance de Γ_v *en* θ *car celui-ci reste inférieur à* $10°$.

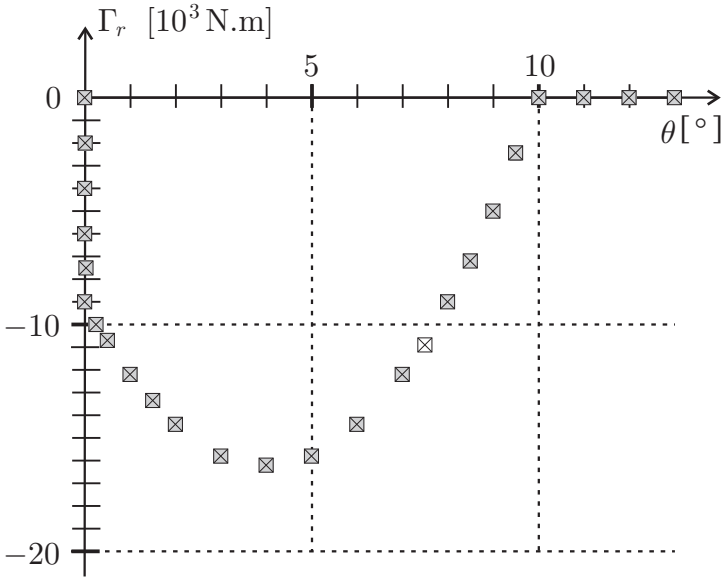


FIGURE 5 – Mesures du moment résistant. La taille des carrés représente l'incertitude de mesure.

L'action du sol sur l'arbre est décrite par un moment résistant Γ_r par rapport à l'axe $(O,\widehat{u}_y)$, qui met en jeu des phénomènes complexes comme l'élasticité des racines, un déracinement partiel, l'entraînement de la terre, etc. Des essais de traction via un câble comme dans la partie **II.A** ont permis de relever les variations de Γ_r (en 10^3 N.m) en fonction de θ (en degrés) de la figure 5 dans le domaine $\theta > 0$ auquel on se limite. Cette figure fait notamment apparaître une variation brutale au voisinage de $\theta = 0$ que l'on modélise par une discontinuité telle que $\Gamma_r(0) = 0$ et $\Gamma_r(0_+) = \Gamma_0$. Par ailleurs, au-delà d'un certain angle θ_c, l'arbre est totalement déraciné, de telle sorte que $\Gamma_r = 0$. Dans le domaine $0 < \theta \leq \theta_c$, on modélise les mesures expérimentales de Γ_r par un polynôme du deuxième degré de la forme :

$$\Gamma_r = \Gamma_0 \left(\beta + 4\,\frac{\theta}{\theta_c} - 5\frac{\theta^2}{\theta_c^2}\right) \qquad \text{avec} \qquad \Gamma_0 < 0 \tag{2}$$

❏ **27** — Quelles valeurs doit-on donner aux paramètres θ_c et β afin qu'il rende compte des mesures de la figure 5. Exprimer l'angle θ_m pour lequel Γ_r atteint sa valeur minimale et la valeur Γ_m de ce minimum. Vérifier la cohérence entre les résultats expérimentaux et les valeurs de θ_m/θ_c et Γ_m/Γ_0 issues du modèle.

Du point de vue de sa dynamique, l'arbre est désormais assimilé à une barre mince en rotation autour de l'axe $(O,\widehat{u}_y)$ avec un moment d'inertie J, soumis au moment constant Γ_v et au moment $\Gamma_r(\theta)$ décrit par le modèle de l'équation (2). Initialement l'arbre est au repos en $\theta = 0$

en présence d'un vent de vitesse U indépendante du temps et on s'interroge sur son évolution. On définit le paramètre $p = \Gamma_v / |\Gamma_0|$.

❏ **28** — Discuter *graphiquement* selon la valeur de p la possibilité pour l'arbre de rester en équilibre en $\theta = 0$. Cet équilibre est-il stable ? Discuter *graphiquement* selon la valeur de p l'existence et la stabilité de positions d'équilibre en $\theta_e \neq 0$. Dans le cas où il existe une position d'équilibre stable inférieure à θ_c, expliquer sans calculs pourquoi on ne peut néanmoins pas être certain que l'arbre résiste au vent.

On se propose de trancher cette question. Les conditions initiales restent $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$.

❏ **29** — Montrer que la vitesse angulaire de l'arbre se met sous la forme $\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = |\Gamma_0| \, \theta \, P(u)$ où $P(u)$ est un trinôme du second degré pour la variable réduite $u = \theta/\theta_c$ que l'on explicitera en fonction de l'unique paramètre $p = \Gamma_v/|\Gamma_0|$. En déduire, en précisant soigneusement le raisonnement adopté, la valeur minimale p_c de p permettant au vent de déraciner l'arbre. Calculer la vitesse minimale U_c du vent permettant de déraciner l'arbre correspondant au graphe de la figure 5 sachant que $H = 20\,\text{m}$ et $a = 0{,}5\,\text{m}$. On prendra $C = 0{,}5$.

On se place désormais dans le cas $p = \dfrac{4}{3}$.

❏ **30** — Déterminer les bornes du mouvement de l'arbre. En réalité l'arbre finit par atteindre une position θ_∞ où il reste immobile. Interpréter qualitativement ce résultat.

FIN DE LA PARTIE II

Données numériques

— intensité de la pesanteur : $g = 1 \times 10^1\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
— masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1 \times 10^3\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
— pression atmosphérique au niveau du sol : $p_0 = 1 \times 10^5\,\text{Pa}$
— viscosité dynamique de l'eau : $\eta_e = 1 \times 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
— coefficient de tension superficielle de l'eau : $\gamma_e = 7 \times 10^{-2}\,\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$
— masse volumique de l'air : $\rho_a = 1\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
— viscosité dynamique de l'air : $\eta_a = 2 \times 10^{-5}\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

Formulaire

Lois de Coulomb : Un solide en contact quasi-ponctuel sur un support subit de la part du support des actions de contact équivalentes à une force $\vec{F}$ que l'on peut décomposer en une composante normale $\vec{N}$ et une composante tangentielle $\vec{T}$.

En l'absence de glissement, on a $\|\vec{T}\| < f \, \|\vec{N}\|$ où f est le coefficient de frottement.

En présence de glissement, la composante tangentielle $\vec{T}$ est dirigée dans la direction opposée à celle du vecteur-vitesse de glissement et on a $\|\vec{T}\| = f \, \|\vec{N}\|$.

Expression de la divergence d'un champ de vecteurs en coordonnées cylindriques (r,θ,x)

$$\text{div}\,\vec{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\,a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_x}{\partial x}$$

« ***À la mémoire d'Olivier Cervera (1964-2018), auteur de ce sujet.*** »

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Description des fluides : statique, cinématique et viscosité
- Dynamique des fluides visqueux
- Référentiels non galiléens
- Statique des solides : principe fondamental et stratégie d'isolement
- Modélisation des actions mécaniques : modèles local et global, frottement, torseurs des liaisons
- Bilans macroscopiques et relation de Bernoulli
- Fonctions usuelles et lecture des graphes

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/psi