Concours commun Mines-Ponts, France

# Session 2020, filière PSI

## Mathématiques 1

Durée : 3 heures

### Ce que traite le sujet

- Partie I : généralités sur les endomorphismes nilpotents
- Partie II : endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien
- Partie III : deux lemmes
- Partie IV : démonstration du théorème B

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/psi/2020/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

**A2020 – MATH I PSI**

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,**
**ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,**
**TÉLÉCOM PARIS, MINES PARISTECH,**
**MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,**
**IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH.**

**Concours Centrale-Supélec (Cycle International),**
**Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.**

**CONCOURS 2020**

**PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

**Durée de l'épreuve : 3 heures**

**L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.**

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :*

*MATHÉMATIQUES I - PSI*

*L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Dans tout le sujet, on considère des **R**-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $E$ un tel espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$. On dit que $u$ est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $u^p = 0$ ; le plus petit de ces entiers est alors noté $\nu(u)$ et appelé **nilindice** de $u$, et l'on notera qu'alors $u^k = 0$ pour tout entier $k \geq \nu(u)$. On rappelle que $u^0 = \mathrm{id}_E$. L'ensemble des endomorphismes nilpotents de $E$ est noté $\mathcal{N}(E)$ : on prendra garde au fait qu'il ne s'agit *a priori* pas d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ !

Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dit **nilpotent** lorsque tous ses éléments sont nilpotents, autrement dit lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(E)$.

Une matrice triangulaire supérieure est dite **stricte** lorsque tous ses coefficients diagonaux sont nuls. On note $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. On admet qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Dans un sujet antérieur du concours (PSI Maths II 2016), le résultat suivant a été établi :

**Théorème A.**
Soit $E$ un **R**-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$. Alors, $\dim \mathcal{V} \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Le théorème **A** est ici considéré comme acquis. L'objectif du présent sujet est de déterminer les sous-espaces vectoriels nilpotents de $\mathcal{L}(E)$ dont la dimension est égale à $\frac{n(n-1)}{2}$. Plus précisément, on se propose d'établir le résultat suivant (Gerstenhaber, 1958) :

**Théorème B.**
Soit $E$ un **R**-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Il existe alors une base de $E$ dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Les trois premières parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres. La partie I est constituée de généralités sur les endomorphismes nilpotents. Dans la partie II, on met en évidence un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien. Dans la partie III, on établit deux résultats généraux sur les sous-espaces vectoriels nilpotents : une identité sur les traces (lemme **C**), et une condition suffisante pour que les éléments d'un sous-espace nilpotent non nul possèdent un vecteur propre commun (lemme **D**). Dans l'ultime partie IV, les résultats des parties précédentes sont combinés pour établir le théorème **B** par récurrence sur la dimension de l'espace $E$.

# I Généralités sur les endomorphismes nilpotents

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel $E$ de dimension $n > 0$. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. On choisit une matrice carrée $M$ représentant l'endomorphisme $u$.

1. Démontrer que $M$ est semblable à une matrice complexe triangulaire supérieure, établir que les coefficients diagonaux de cette dernière sont nuls, et en déduire que $\operatorname{tr} u^k = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

On fixe une base $\mathbf{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$. On note $\mathcal{N}_\mathbf{B}$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ dont la matrice dans $\mathbf{B}$ est triangulaire supérieure stricte.

2. Justifier que $\mathcal{N}_\mathbf{B}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$, et mettre en évidence dans $\mathcal{N}_\mathbf{B}$ un élément nilpotent de nilindice $n$. *On pourra introduire l'endomorphisme $u$ de $E$ défini par $u(e_i) = e_{i-1}$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, et $u(e_1) = 0$.*

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se donne deux vecteurs $x$ et $y$ de $E$, ainsi que deux entiers $p \geq q \geq 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$, $u^{p-1}(x) \neq 0$ et $u^{q-1}(y) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre, et que si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre alors $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), y, u(y), \ldots, u^{q-1}(y))$ est libre.

4. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, de nilindice $p$. Déduire de la question précédente que $p \leq n$ et que si $p \geq n-1$ et $p \geq 2$ alors $\operatorname{Im} u^{p-1} = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u^{p-1}$ est de dimension 1.

# II Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien $(E, (- \mid -))$. Lorsque $a$ désigne un vecteur de $E$, on note

$$\varphi_a : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto (a \mid x). \end{cases}$$

5. Calculer la dimension de $\mathcal{L}(E, \mathbf{R})$ en fonction de celle de $E$. Montrer que $a \mapsto \varphi_a$ définit un isomorphisme de $E$ sur $\mathcal{L}(E, \mathbf{R})$.

Étant donné $a \in E$ et $x \in E$, on notera désormais $a \otimes x$ l'application de $E$ dans lui-même définie par :

$$\forall z \in E,\ (a \otimes x)(z) = (a \mid z).x$$

6. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $a \in E \mapsto a \otimes x$ est linéaire et constitue une bijection de $E$ sur $\{u \in \mathcal{L}(E) : \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(x)\}$.

7. Soit $a \in E$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\operatorname{tr}(a \otimes x) = (a \mid x)$.

# III Deux lemmes

On considère ici un espace euclidien $(E, (- \mid -))$ de dimension $n > 0$. On rappelle que l'on a démontré à la question 4 que le nilindice d'un élément de $\mathcal{N}(E)$ est toujours inférieur ou égal à $n$. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ contenant un élément non nul. On note

$$p := \max_{u \in \mathcal{V}} \nu(u),$$

appelé **nilindice générique** de $\mathcal{V}$. On a donc $p \geq 2$.

On introduit le sous-ensemble $\mathcal{V}^\bullet$ de $E$ formé des vecteurs appartenant à au moins un des ensembles $\operatorname{Im} u^{p-1}$ pour $u$ dans $\mathcal{V}$ ; on introduit de plus le sous-espace vectoriel engendré

$$K(\mathcal{V}) := \operatorname{Vect}(\mathcal{V}^\bullet).$$

Enfin, étant donné $x \in E$, on pose

$$\mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\}.$$

L'objectif de cette partie est d'établir les deux résultats suivants :

**Lemme C.** Soit $u$ et $v$ dans $\mathcal{V}$. Alors $\operatorname{tr}(u^k v) = 0$ pour tout entier naturel $k$.

**Lemme D.** Soit $x$ dans $\mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$. Si $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout $v$ dans $\mathcal{V}$.

Dans les questions 8 à 11, on se donne deux éléments arbitraires $u$ et $v$ de $\mathcal{V}$.

8. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique famille $(f_0^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de $E$ telle que

$$\forall t \in \mathbf{R},\ (u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}.$$

Montrer en particulier que $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.
*Pour l'unicité, on pourra utiliser une représentation matricielle.*

9. À l'aide de la question précédente, montrer que $\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.

10. Étant donné $k \in \mathbf{N}$, donner une expression simplifiée de $\operatorname{tr}(f_1^{(k+1)})$, et en déduire la validité du lemme **C**.

11. Soit $y \in E$. En considérant, pour un $a \in K(\mathcal{V})^\perp$ quelconque, la fonction $t \in \mathbf{R} \mapsto (a \mid (u+tv)^{p-1}(y))$, démontrer que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$. À l'aide d'une relation entre $u(f_1^{(p-1)}(y))$ et $v(u^{p-1}(y))$, en déduire que $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.

12. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.
    Étant donné $y \in K(\mathcal{V})$, montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbf{R}$ tels que $y = \lambda_k\, x + u^k(y_k)$. En déduire que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x)$ puis que $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

# IV Démonstration du théorème B

Dans cette ultime partie, nous démontrons le théorème **B** par récurrence sur l'entier $n$. Le cas $n = 1$ est immédiat et nous le considérerons comme acquis. On se donne donc un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose que pour tout espace vectoriel réel $E'$ de dimension $n-1$ et tout sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{L}(E')$, de dimension $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, il existe une base de $E'$ dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}'$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

On fixe un espace vectoriel réel $E$ de dimension $n$, ainsi qu'un sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. On munit $E$ d'un produit scalaire $(- \mid -)$, ce qui en fait un espace euclidien.

On considère, dans un premier temps, un vecteur arbitraire $x$ de $E \setminus \{0\}$. On pose

$$H := \operatorname{Vect}(x)^\perp, \quad \mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{W} := \{v \in \mathcal{V} :\ v(x) = 0\}.$$

On note $\pi$ la projection orthogonale de $E$ sur $H$. Pour $u \in \mathcal{W}$, on note $\overline{u}$ l'endomorphisme de $H$ défini par

$$\forall z \in H,\ \overline{u}(z) = \pi(u(z)).$$

On considère enfin les ensembles

$$\overline{\mathcal{V}} := \{\overline{u} \mid u \in \mathcal{W}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{W} :\ \overline{u} = 0\}.$$

13. Montrer que $\mathcal{V}x$, $\mathcal{W}$, $\overline{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{Z}$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de $E$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}(H)$ et $\mathcal{V}$.

14. Montrer que
$$\dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} + \dim \overline{\mathcal{V}}.$$

15. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $L$ de $E$ tel que
$$\mathcal{Z} = \{a \otimes x \mid a \in L\} \quad \text{et} \quad \dim L = \dim \mathcal{Z},$$
et montrer qu'alors $x \in L^\perp$.

16. En considérant $u$ et $(a \otimes x)$ pour $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$, déduire du lemme **C** que $\mathcal{V}x \subset L^\perp$, et que plus généralement $u^k(x) \in L^\perp$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $u \in \mathcal{V}$.

17. Justifier que $\lambda x \notin \mathcal{V}x$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$, et déduire alors des deux questions précédentes que
$$\dim \mathcal{V}x + \dim L \leq n - 1.$$

18. Soit $u \in \mathcal{W}$. Montrer que $(\overline{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $z \in H$. En déduire que $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(H)$.

19. Déduire des questions précédentes et du théorème **A** que
$$\dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad \dim(\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim L = n$$
et
$$L^\perp = \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x.$$
En déduire que $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ contient $v^k(x)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $k \in \mathbf{N}$.

20. En appliquant, entre autres, l'hypothèse de récurrence et la question 19, montrer que le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur ou égal à $n-1$, et que si en outre $\mathcal{V}x = \{0\}$ alors il existe une base de $E$ dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Compte tenu du résultat de la question 20, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur $x$ de telle sorte que $\mathcal{V}x = \{0\}$.

On choisit $x$ dans $\mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ (l'ensemble $\mathcal{V}^\bullet$ a été défini dans la partie III). On note $p$ le nilindice générique de $\mathcal{V}$, et l'on fixe $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \mathrm{Im}\, u^{p-1}$. On rappelle que $p \geq n-1$ d'après la question 20.

21. Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. *On pourra utiliser les résultats des questions 4 et 19.*

22. On suppose qu'il existe $v_0$ dans $\mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$. En considérant $v + tv_0$ pour $t$ réel, montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.
*On pourra s'inspirer de la méthode de la question 11.*

23. Conclure.

Fin du problème

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Compléments d'algèbre linéaire
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/psi