Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2021, filière PSI

Mathématiques 1

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Questions de cours
- Généralités sur les variables aléatoires
- Deux sommes de séries
- Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique
- Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des moyennes empiriques

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/psi/2021/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A2021 – MATH I PSI

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2021

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion

Dans tout le sujet, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « variable aléatoire » pour parler d'une variable aléatoire réelle discrète, et « variable aléatoire entière » pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{Z}$. On pourra noter

$$X(\Omega) = \{x_n,\, n \in I\}$$

où I est un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbf{N}$ et $x_n \in \mathbf{R}$ pour tout $n \in I$.

Définition 1 (Dispersion d'ordre α) *On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire. On dit que X **vérifie la condition** $(\mathcal{D}_\alpha)$ - dite de dispersion d'ordre α - lorsque, quand n tend vers $+\infty$,*

$$\mathbf{P}(|X| \geq n) = \frac{\alpha}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big). \tag{1}$$

Définition 2 (Variables aléatoires symétriques) *On dit que X est **symétrique** lorsque $-X$ suit la même loi que X, autrement dit lorsque*

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(X = -x). \tag{2}$$

On admet le *principe de transfert de l'égalité en loi* :

Théorème 1 *Étant donné deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans un même ensemble E, ainsi qu'une application $u : E \to F$, si X et Y suivent la même loi alors $u(X)$ et $u(Y)$ aussi.*

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires entières, mutuellement indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. On *admet* que sous ces conditions la variable X_{n+1} est indépendante de $X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

appelée n-ième moyenne empirique des variables X_k. L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables M_n.

Les trois premières parties du sujet sont totalement indépendantes les unes des autres.

Questions de cours

1 ▷ Soit X une variable aléatoire. Rappeler la définition de « X est d'espérance finie ». Montrer alors que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.

2 ▷ Soit X une variable aléatoire. Montrer que si X est bornée, autrement dit s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $P(|X| \leq M) = 1$, alors X est d'espérance finie.

Généralités sur les variables aléatoires

3 ▷ Soit X une variable aléatoire entière vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$. Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.

4 ▷ Soit X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $\mathbf{E}(f(X)) = 0$.

5 ▷ Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de (X, Y), démontrer que $X + Y$ est symétrique.

Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leq 1$. On introduit la fonction

$$L : t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1 - uz} \, \mathrm{d}u.$$

6 ▷ Montrer que, sur le segment $[0, 1]$, la fonction L est convenablement définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner une expression simple de sa dérivée n-ième pour tout $n \geq 1$.

7 ▷ Justifier que pour tout $t \in]0, 1]$, on a $1 - t \leq |1 - tz|$, et plus précisément encore que $1 - t < |1 - tz|$.

8 ▷ En déduire successivement que

$$\int_0^1 \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} \, \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

9 ▷ En déduire, grâce à une formule de Taylor, que $L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

10 ▷ Montrer que la fonction

$$\gamma : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (t,u) & \longmapsto |1+ue^{it}| \end{cases}$$

est continue. En déduire qu'il existe, pour tout $a \in]0,\pi[$, un réel $m_a > 0$ tel que

$$\forall (t,u) \in [-a,a] \times [0,1], \quad |1+ue^{it}| \geq m_{a.}$$

11 ▷ Montrer que la fonction

$$F : t \in]-\pi,\pi[\longmapsto \int_0^1 \frac{e^{it}}{1+ue^{it}}\,\mathrm{d}u$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

12 ▷ Montrer que

$$\forall t \in]-\pi,\pi[\,,\ F'(t) = -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2},$$

et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in]-\pi,\pi[$.

13 ▷ Soit $\theta \in]0,2\pi[$. Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\Big(2\sin\frac{\theta}{2}\Big) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique X. On pose

$$\Phi_X : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto \mathbf{E}\Big(\cos(tX)\Big), \end{cases}$$

appelée fonction caractéristique de X.

14 ▷ Montrer que Φ_X est bien définie, paire et que $\forall t \in \mathbf{R},\ |\Phi_X(t)| \leq 1$.

15 ▷ En utilisant le théorème du transfert, montrer que Φ_X est continue.

Dans la suite de cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$R_n := \mathbf{P}(|X| \geq n).$$

16 ▷ On fixe un réel $t \in]0, 2\pi[$. Montrer successivement que

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$$

puis

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \Big[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\Big].$$

On pourra établir au préalable la convergence de la série $\sum_n R_n \cos(nt)$.

17 ▷ Montrer qu'il existe un nombre réel C tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} C,$$

et en déduire que, quand t tend vers 0^+,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln t) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\,\alpha}{2} + o(1).$$

18 ▷ Conclure que, quand t tend vers 0^+,

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\,\alpha}{2}\, t + o(t).$$

La fonction Φ_X est-elle dérivable en 0 ?

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19 ▷ Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\, \Phi_Y(t).$$

20 ▷ Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, la variable M_n est symétrique et

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \Big(\Phi_{X_1}(t/n)\Big)^n.$$

21 ▷ En déduire que pour tout réel t,

$$\Phi_{M_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\Big(-\frac{\pi\alpha\,|t|}{2}\Big).$$

22 ▷ La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur $\mathbf{R}$?

À partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $\frac{\pi\alpha}{2}$, ce qui signifie que pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$,

$$\mathbf{P}(a \leq M_n \leq b) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{2}\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + (\pi\alpha/2)^2}.$$

Fin du problème

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Séries numériques et vectorielles
- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Nombres complexes et trigonométrie
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Limites et continuité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/psi