Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2021, filière PSI

Physique 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : principe de la vélocimétrie laser
- Partie II : mesure d'un profil de Poiseuille
- Partie III : étude d'ondes acoustiques

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/psi/2021/physique2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A2021 – PHYSIQUE II PSI

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2021

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Vélocimétrie laser Doppler

Alors même que la simulation numérique en mécanique des fluides est de plus en plus performante, le recours à l'expérimentation reste nécessaire, ne serait-ce que pour valider ces simulations.
À cette fin, la détermination de cartes de vitesses au sein d'un écoulement est un outil précieux. Ce sujet s'intéresse à une méthode peu invasive : la vélocimétrie laser Doppler. Le fluide dont on souhaite étudier l'écoulement est ensemencé à l'aide de particules le plus souvent solides, qui se déplacent au sein du fluide, idéalement à la même vitesse et sans le perturber. Lors du passage de ces particules à travers un ou plusieurs faisceaux laser, la lumière est diffusée et son analyse permet la détermination de la vitesse de la particule, et donc localement du fluide qui la porte.
On propose en figure 1 une vue d'ensemble du dispositif de mesure à deux faisceaux, sur laquelle on ne représente pas le dispositif destiné à analyser la lumière diffusée par les particules ensemencées dans le fluide.

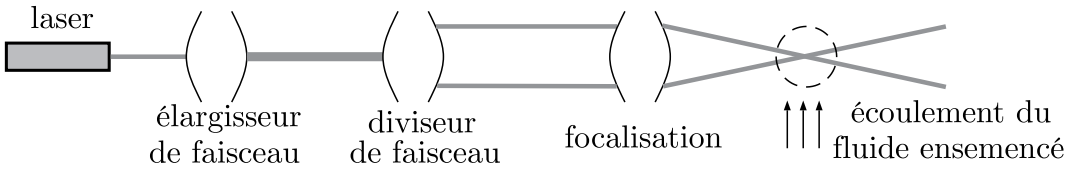


FIGURE 1 – Vue d'ensemble du dispositif.

Ce sujet aborde dans une première partie le principe de la vélocimétrie laser Doppler, puis étudie deux domaines d'application : l'écoulement d'un liquide dans une canalisation puis l'étude d'ondes sonores guidées. Ces parties sont assez largement indépendantes.
Les applications numériques seront données avec 1 seul chiffre significatif. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires $\widehat{u}$ ou d'une flèche dans le cas général $\vec{v}$. Les vecteurs unitaires de la base cartésienne sont notés $(\widehat{u}_x, \widehat{u}_y, \widehat{u}_z)$ et ceux de la base cylindrique d'axe Ox $(\widehat{u}_r, \widehat{u}_\theta, \widehat{u}_x)$. En fin de sujet sont regroupées des constantes de la physique utiles, ainsi qu'un formulaire d'analyse vectorielle.

I Principe de la vélocimétrie laser

Dans toute cette partie, le fluide en écoulement est supposé transparent. On note c_0 la vitesse de la lumière dans le vide et dans le fluide, assimilé au vide du point de vue des ondes électromagnétiques.

I.A Montage à 1 faisceau

L'effet Doppler décrit le décalage en fréquence d'une onde, observé entre les mesures à l'émission et à la réception, lorsque la distance entre l'émetteur et le récepteur varie au cours du temps.
Dans le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire, supposé galiléen, on fixe un laser et un récepteur lumineux. Le laser à argon utilisé émet une onde plane progressive monochromatique (OPPM) électromagnétique de fréquence f_e et longueur d'onde $\lambda_e = 5{,}2 \times 10^2$ nm, dirigée selon $\widehat{u}_e$ et se propageant à c_0.
Une particule solide P, supposée ponctuelle et possédant une vitesse $\vec{V}$ dans $\mathscr{R}$, constitue un observateur mobile par rapport à l'émetteur laser fixe. Par effet Doppler, elle perçoit donc une fréquence f_p différente de la fréquence f_e émise.

La figure 2 décrit une période spatiale λ_e de l'OPPM délimitée par deux fronts d'onde Π_1 et Π_2 à l'instant t, et par deux fronts d'ondes Π_1' et Π_2' à l'instant $t' = t + \Delta t$ avec $\Delta t = 1/f_p$. P appartient à Π_1 à l'instant t puis à Π_2' à l'instant t'.

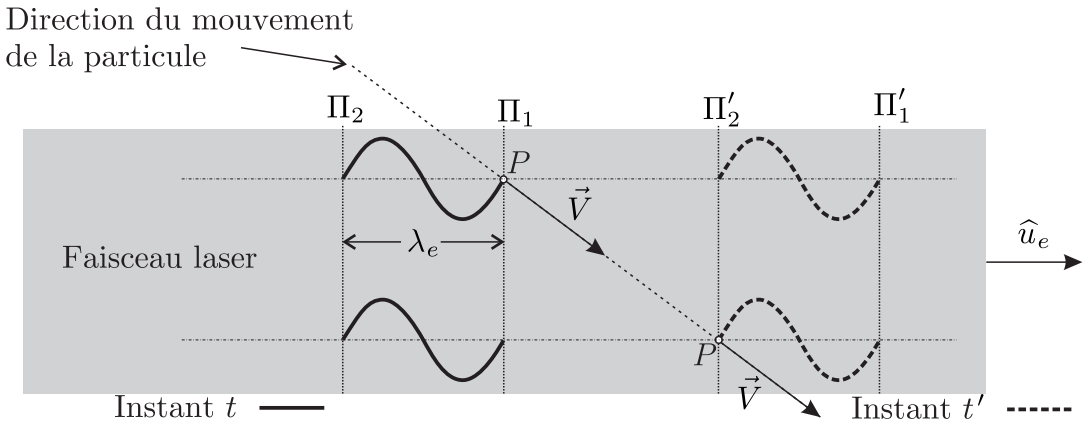


FIGURE 2 – Effet Doppler.

❑ – **1**. En faisant apparaître $\vec{V} \cdot \widehat{u}_e$, exprimer la distance parcourue par l'onde pendant Δt en fonction de la distance parcourue par la particule et de λ_e. En déduire la relation

$$f_p = f_e \left(1 - \frac{\widehat{u}_e \cdot \vec{V}}{c_0}\right)$$

La particule mobile diffuse à son tour de la lumière vers un photorécepteur fixe, selon la direction de $\widehat{u}_d$. Par effet Doppler, ce dernier perçoit une fréquence f_d différente de la fréquence f_p émise.

❑ – **2**. Dans le référentiel $\mathscr{R}'$ lié à la particule et en translation par rapport à $\mathscr{R}$, la particule émettrice de lumière est fixe et le récepteur mobile. En le justifiant, adapter le résultat de la question précédente afin de relier f_d et f_p.

❑ – **3**. Pour une vitesse $\|\vec{V}\| \ll c_0$ de l'ordre de $10\,\text{cm.s}^{-1}$, en déduire que :

$$f_d \simeq f_e + \frac{(\widehat{u}_d - \widehat{u}_e) \cdot \vec{V}}{\lambda_e} \tag{1}$$

Pour un laser à argon, que penser de l'écart relatif en fréquence, entre OPPM émise et reçue au niveau du photorécepteur ? On s'appuiera sur une analyse numérique.

I.B Montage à 2 faisceaux

Afin d'améliorer la précision des vitesses mesurées, ainsi que la localisation de celles-ci dans le fluide, on a recours à un dispositif à deux faisceaux laser.

I.B.1 Élargisseur et diviseur de faisceau

L'élargisseur de faisceau, présenté en figure 3–a, transforme un faisceau cylindrique laser de largeur d_0, en un autre de largeur $d_0' > d_0$. Le diviseur de faisceau, présenté en figure 3–b, le sépare ensuite en deux faisceaux parallèles de largeur identiques d_0'' qui ne se recouvrent pas et dont les axes sont distants de D.

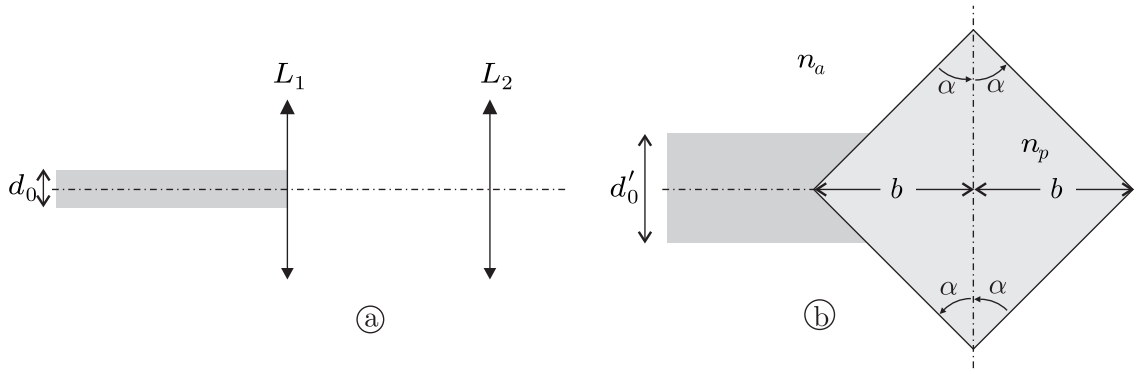


FIGURE 3 – Élargisseur (a) et diviseur de faisceau (b)

❑ − **4**. Reproduire le schéma de l'élargisseur de faisceau de la figure 3–a et positionner les foyers des deux lentilles permettant d'obtenir un faisceau de largeur d_0' supérieur à d_0. Exprimer alors d_0' en fonction de d_0 et des distances focales f_1' et f_2' de L_1 et L_2.

Exprimer l'encombrement de ce dispositif, défini comme sa longueur sur l'axe optique, en fonction de f_1', d_0 et d_0'.

Proposer un dispositif permettant de réduire cet encombrement sans changer d_0'. On exprimera le nouvel encombrement et on justifiera qu'il est inférieur à celui du premier dispositif.

Le faisceau de largeur d_0' arrive sur un prisme diviseur de faisceau en verre d'indice n_p dont les caractéristiques géométriques sont précisées sur le schéma de la figure 3–b. On note $2b$ la largeur du prisme et on prendra $\alpha = \pi/4$.

❑ − **5**. Reproduire le schéma et le compléter afin d'expliquer son fonctionnement : on y indiquera d_0', d_0'' et D. En justifiant rapidement sa réponse, donner la valeur de d_0''. Pourquoi parle-t-on de diviseur de faisceau à différence de marche nulle ? Proposer un autre dispositif permettant d'obtenir la division d'un faisceau. Est-il à différence de marche nulle ?

❑ − **6**. À la limite de non recouvrement des faisceaux, déterminer la relation entre b, d_0' et n_p sous la forme

$$b = \frac{d_0'}{2}\left[\frac{g(n_p)}{g(n_p)-1}\right]$$

où g est une fonction de n_p que l'on explicitera, sans fonction trigonométrique. En déduire une condition sur b pour que les faisceaux soient effectivement séparés.

I.B.2 Étude de l'onde diffusée

Une lentille convergente focalise les deux faisceaux laser précédents vers une zone de recouvrement où circule le fluide en écoulement. Ces deux faisceaux, notés F_1 et F_2, sont assimilés à des OPPM d'extension spatiale finie de largeur d, de même intensité et de même fréquence f_e.

Sur la figure 4, on note $\vec{k}_{e1} = k_e\widehat{u}_{e1}$ et $\vec{k}_{e2} = k_e\widehat{u}_{e2}$ les vecteurs d'onde respectivement associés à F_1 et F_2 ainsi que θ l'angle entre ces deux vecteurs. La lumière diffusée de la particule P vers le récepteur O est portée par le vecteur d'onde commun $\vec{k}_d = k_d\widehat{u}_d$.
On s'intéresse alors au passage d'une particule solide d'ensemencement P, de vitesse $\vec{V} = V_x\widehat{u}_x + V_y\widehat{u}_y + V_z\widehat{u}_z$ dans la zone de recouvrement des faisceaux.

Au niveau du récepteur, les champs électriques issus de F_1 et F_2 et diffusés par P s'écrivent :

$$\underline{\vec{E}_{d1}} = \underline{E_{d1}}\widehat{u}_x = E_0 e^{2i\pi f_{d1}t}\widehat{u}_x \qquad \text{et} \qquad \underline{\vec{E}_{d2}} = \underline{E_{d2}}\widehat{u}_x = E_0 e^{2i\pi f_{d2}t}\widehat{u}_x$$

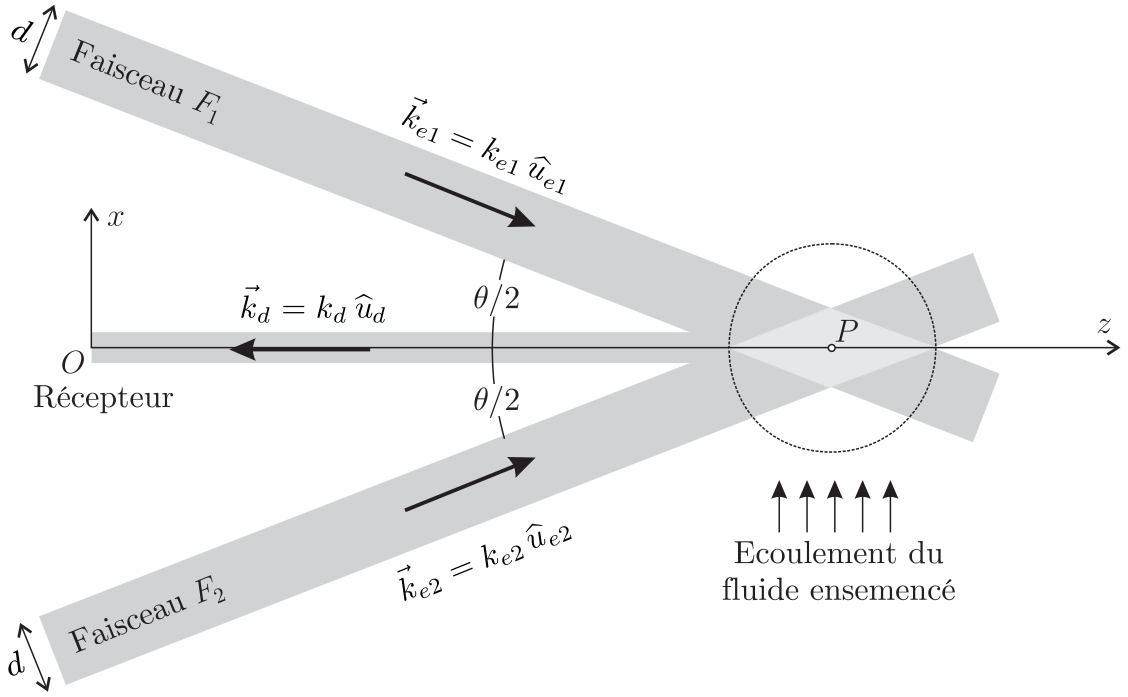


FIGURE 4 – Zone de recouvrement des lasers. Diffusion de lumière par une particule.

❑ – **7**. En utilisant le résultat (1), exprimer $f_{d1} - f_{d2}$ en fonction de λ_e, θ et de l'une des composantes de la vitesse $\vec{V}$.

Le photorécepteur est sensible à $I(t) = K\left|\underline{E_{d1}} + \underline{E_{d2}}\right|^2$ où K est une constante positive caractéristique du récepteur.

❑ – **8**. Montrer que le signal reçu s'écrit sous la forme $I(t) = 2\Lambda\,[1 + \cos(\beta t)]$. On précisera Λ et β en fonction des données. Exprimer la fréquence f_c de clignotement de cette lumière diffusée en fonction de λ_e, θ et l'une des composantes de $\vec{V}$.

❑ – **9**. La valeur de la composante de la vitesse particulaire intervenant dans le résultat de la question précédente est de $10\,\text{cm.s}^{-1}$; calculer numériquement la valeur de f_c obtenue avec deux faisceaux issus d'un laser à argon faisant un angle de 3,6° entre eux. Justifier l'utilisation de deux faisceaux lasers en termes de précision de la mesure et de localisation de la particule.

I.B.3 Cellule de Bragg

❑ – **10**. Le photorécepteur utilisé possède un temps de réponse de $\tau = 4{,}4 \times 10^{-9}\,\text{s}$ et l'angle θ entre les faisceaux vaut 3,6°. Pour le laser à argon, déterminer littéralement puis numériquement la plage $[-V_{\max}, +V_{\max}]$ de vitesses détectables par le système.

❑ – **11**. Pourquoi ne peut-on mesurer qu'une seule composante de $\vec{V}$ avec ce dispositif ? Proposer une solution permettant d'accéder simultanément aux trois composantes du vecteur vitesse de la particule.

❑ – **12**. Pourquoi ne peut-on pas faire la différence entre une valeur positive et une valeur négative de la composante mesurée ?

Avant d'atteindre la zone de recouvrement, on place une cellule de Bragg sur le trajet du faisceau F_1 uniquement. Il s'agit d'un milieu transparent parcouru par une OPPM acoustique de fréquence f_B.

En traversant cette cellule qui se comporte comme un réseau, F_1 donne naissance à différents faisceaux, déviés par rapport au faisceau incident. Parmi eux, seul celui d'ordre 1, de fréquence $f_e + f_B$, croise F_2, inchangé à la fréquence f_e, dans la zone de recouvrement.

❑ – **13**. Déterminer la nouvelle expression f'_c de la fréquence de clignotement, en fonction de f_B, λ_e, θ et d'une des composantes de $\vec{V}$. Dans les mêmes conditions que la question 10, exprimer et calculer la fréquence f_B optimale, c'est-à-dire celle permettant la mesure d'une des composantes de $\vec{V}$ (et de son signe) dans l'intervalle $[-V_{\max}/2, +V_{\max}/2]$. Analyser votre résultat sachant que la centaine de MHz est réalisable dans certains matériaux.

II Application à la mesure d'un profil de Poiseuille

On étudie l'écoulement stationnaire, de débit volumique Q, d'un liquide incompressible de masse volumique μ et de viscosité dynamique η, dans une conduite horizontale cylindrique de rayon R et de longueur L selon l'axe Ox.

❑ – **14**. Exprimer le nombre de Reynolds de l'écoulement en fonction de grandeurs définies ci-dessus. À quelle condition l'écoulement peut-il être considéré comme laminaire ? On supposera cette hypothèse vérifiée dans la suite.

La conduite est soumise à des pressions P_e en entrée et $P_s = P_e - \Delta P$ en sortie avec $\Delta P > 0$. A l'intérieur, le champ de pression et celui des vitesses s'écrivent sous la forme $P(M,t) = P(x)$ et $\vec{v}(M,t) = v(r,x)\widehat{u}_x$ en coordonnées cylindriques. Pour une longueur L de conduite, la force de viscosité qu'exerce le liquide en $r > r_0$ sur le liquide en $r < r_0$, s'écrit $\vec{F} = 2\eta\pi r_0 L \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=r_0} \widehat{u}_x$.

❑ – **15**. Justifier que $v(r,x)$ est indépendant de x. Établir une équation différentielle en $v(r)$.

En déduire que le profil des vitesses dans la conduite est de la forme $v(r) = A\left[1 - \left(\dfrac{r}{R}\right)^q\right]$ où q est un entier que l'on déterminera et dans laquelle on précisera l'expression de A en fonction de ΔP, R, L et η.

Déterminer enfin une relation entre Q et A et R.

On réalise une série de mesures de la vitesse axiale du liquide dans une conduite cylindrique de rayon $R = 13\,\text{mm}$, dans laquelle une solution aqueuse circule.

Pour réaliser ces mesures, la zone de croisement des faisceaux est déplacée le long d'un diamètre de la conduite.

Pour chaque position, une dizaine de mesures est prise et leur moyenne calculée.

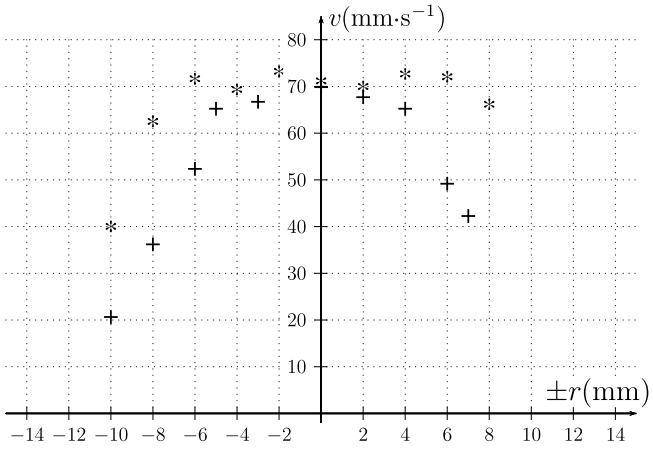


FIGURE 5 – Solution 1 (∗) ; solution 2 (+)

On obtient les résultats de la figure 5, pour deux types de solutions :

- La solution 1 est constituée d'eau de viscosité dynamique $\eta_1 = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\text{Pa.s}$;
- La solution 2 est un mélange à parts égales d'eau et de sucre de canne de masse volumique $\mu_2 = 1{,}2 \times 10^3\,\text{kg.m}^{-3}$ et de viscosité dynamique $\eta_2 = 5{,}5 \times 10^{-3}\,\text{Pa.s}$

Sur l'axe des abscisses de la figure 5, la distance r est relative à l'axe de la conduite.

❑ – **16**. Lequel de ces deux écoulements correspond le plus à un écoulement laminaire ? Estimer le débit volumique puis en déduire le nombre de Reynolds pour chacune de ces deux expériences. Interpréter les résultats.

III Application à l'étude d'ondes acoustiques

III.A Onde acoustique guidée

Un émetteur produit dans l'air une onde acoustique de fréquence $f = 40\,\text{kHz}$ et de longueur d'onde λ. L'air, de viscosité négligeable, possède une masse molaire $M = 29\,\text{g.mol}^{-1}$, un coefficient de compressibilité isentropique χ_S et un coefficient de Laplace $\gamma = 1{,}4$. Au repos, à $20°C$, la pression de l'air vaut $P_0 = 1\,\text{bar}$ et sa masse volumique $\mu_0 = 1{,}2\,\text{kg.m}^{-3}$.

❑ – **17**. Qu'est-ce que l'approximation acoustique ? Donner sans démonstration un système de trois équations locales linéarisées utiles pour un problème unidimensionnel orienté par l'axe Ox. En déduire l'équation d'onde vérifiée par la surpression $p_1(x,t)$.

❑ – **18**. En assimilant l'air à un gaz parfait, montrer que la célérité c du son dépend de la masse molaire du milieu. Calculer numériquement c dans l'air à $20°C$.

❑ – **19**. Pour une OPPM, établir l'expression de l'impédance acoustique Z_a. Exprimer l'intensité en décibel I_{dB} en fonction de v_m l'amplitude de la vitesse acoustique, $I_0 = 1{,}0 \times 10^{-12}\,\text{W.m}^{-2}$ l'intensité seuil d'audibilité d'un son, et Z_A. Calculer numériquement v_m si $I_{dB} = 120\,\text{dB}$ dans l'air à $20°C$. Le vélocimètre à deux lasers étudié précédemment permettrait-il d'accéder à de telles valeurs de v_m ?

On généralise l'équation d'onde vérifiée par la surpression $p_1(M,t)$ à une géométrie quelconque :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}(M,t) = c^2 \Delta p_1(M,t)$$

Deux plaques rigides de grandes dimensions sont fixées en $z = 0$ et $z = a$ et représentées en figure 6. Elles imposent comme conditions à la surpression :

$$\left.\frac{\partial p_1}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial p_1}{\partial z}\right|_{z=a} = 0$$



FIGURE 6 – Modèle plan de guide d'onde acoustique.

❑ – **20**. Justifier que l'on cherche une solution du problème sous la forme $p_1(M,t) = p(z)\cos(\omega t - kx + \phi)$ puis caractériser physiquement une telle onde. On prendra $k > 0$ et $\omega > 0$.

❑ – **21**. Déterminer et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $p(z)$. On montrera que les solutions s'écrivent :

$$p_n(z) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \qquad n \in \mathbb{N}$$

Justifier précisément que le mode propre fondamental corresponde à $n = 0$.

❑ – **22**. Trouver la relation de dispersion pour chaque mode propre et montrer l'existence d'une pulsation de coupure $\omega_{c,n}$ à partir de laquelle le mode propre $n > 0$ peut se propager. En déduire la vitesse de phase et la vitesse de groupe, associées à chaque mode propre, en fonction de c, ω et $\omega_{c,n}$. Commenter ces expressions.

❑ – **23**. À quelle condition sur a et la longueur d'onde λ de l'onde libre, le mode fondamental $n = 0$ se propage-t-il seul entre les plaques ? Faire l'application numérique correspondant à cette condition.

Étudions désormais la propagation d'une onde acoustique dans une conduite circulaire de rayon a. On peut utiliser les résultats de la question **22**, à condition de considérer une pulsation de coupure $\omega_{c,nm} = \dfrac{\mu_{nm}c}{a}$. Le paramètre μ_{nm} désigne la valeur de la variable x pour laquelle la fonction de Bessel d'ordre n, $J_n(x)$, admet son $m^{\text{ième}}$ maximum.

ordre n	μ_{n1}	μ_{n2}	μ_{n3}	μ_{n4}
0	0	3,8	7,0	10,2
1	1,8	5,3	8,5	
2	3,1	6,7	10,0	
3	4,2	8,0		
4	5,3	9,3		
5	6,4			
6	7,5			

❑ – **24**. Quels modes propres, caractérisés par un couple d'entiers (n,m), peuvent se propager dans un tuyau de diamètre $2a = 11\,\text{mm}$?

❑ – **25**. Ce tuyau est alimenté par des salves d'une durée de 4 périodes. Les différents modes propres se propageant sous forme de paquets d'ondes, quelle longueur de tuyau faut-il choisir pour pouvoir les résoudre en sortie ?

III.B Production de l'onde acoustique

Pour émettre des ondes acoustiques par salves, l'émetteur doit être alimenté par un générateur de trains de sinusoïdes à 40 kHz.

Considérons tout d'abord le montage de la figure 7 où l'ALI, supposé idéal, est alimenté par des tensions $\pm 15\,\text{V}$ et dont les tensions de saturation sont alors également $\pm V_{sat} = \pm 15\,\text{V}$.

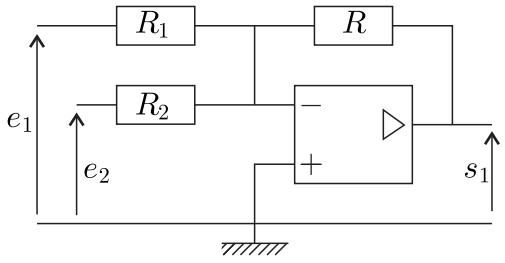


FIGURE 7 – Montage à ALI idéal.

❑ – **26**. Exprimer la tension s_1 en fonction des données du montage. Représenter un montage permettant d'obtenir une tension $s = -s_1$.

On adapte ce montage de la façon suivante :
- $R = R_1 = R_2 = 47\,\text{k}\Omega$;
- $e_1(t)$: tension sinusoïdale de fréquence $f_1 = 40\,\text{kHz}$ et d'amplitude crête à crête $8\,\text{V}$;
- $e_2(t)$: tension en créneau de fréquence $f_2 = 5{,}0\,\text{kHz}$ et d'amplitude crête à crête $12\,\text{V}$;

❑ – **27**. Tracer l'allure de la courbe $s(t)$ en fonction du temps, sur une durée de $4 \times 10^{-4}\,\text{s}$. On précisera les coordonnées des points remarquables.

On modifie l'alimentation de l'ALI, initialement de $\pm 15\,\text{V}$, par deux tensions de $0\,\text{V}$ et $15\,\text{V}$.

❑ – **28**. Reprendre la question précédente : en quoi l'allure de $s(t)$ est-elle modifiée. L'objectif d'un générateur de salves semble-t-il atteint ?

❑ – **29**. La fiche technique de l'amplificateur opérationnel LM741 utilisé indique une vitesse limite de balayage de $0{,}5\,\text{V.}\mu\text{s}^{-1}$. Pourquoi le signal $s(t)$ sera-t-il déformé ? Comment minimiser les effets de ce défaut sans changer de composant ?

III.C Ensemencement

Pour mesurer la vitesse de l'air, due à la présence d'une onde acoustique, on y insémine des particules solides en suspension qui diffusent la lumière. La vitesse mesurée par effet Doppler n'est donc pas directement la vitesse v_f du fluide étudié, mais la vitesse v_p des particules d'ensemencement utilisées comme traceurs.
Au cours de son mouvement, une particule sphérique de masse volumique $\mu_p = 1{,}0 \times 10^3\,\text{kg.m}^{-3}$ n'est soumise qu'à la force de frottement visqueux $-3\pi d_p \eta_f (v_p - v_f)$ où $d_p = 1{,}0\,\mu\text{m}$ désigne le diamètre de la particule et $\eta_f = 1{,}8 \times 10^{-5}\,\text{Pa.s}$ la viscosité dynamique de l'air à $20°C$.

❑ – **30**. Justifier l'expression de cette force par le calcul d'un nombre adimensionné.

❑ – **31**. En régime harmonique de fréquence f, exprimer le rapport des vitesses complexes $\underline{v_p}/\underline{v_f}$ en fonction de f et d'une fréquence f_0 à définir en fonction des données. Calculer $\overline{f_0}$ numériquement.

❑ – **32**. Dans quel intervalle fréquentiel faut-il travailler ? À la fréquence f de l'émetteur, quelle erreur relative est commise sur la mesure de l'amplitude de v_f ? Quelle fréquence maximale faut-il choisir pour commettre une erreur relative inférieure à 1% ? Conclure sur l'intérêt de ces particules pour étudier des infrasons, des sons audibles ou des ultrasons.

Données numériques

— vitesse de la lumière dans le vide : $c_0 = 3{,}0 \times 10^8\,\text{m.s}^{-1}$
— constante des gaz parfaits : $R = 8{,}3\,\text{J.K}^{-1}\text{.mol}^{-1}$

Opérateurs vectoriels

Expressions des opérateurs vectoriels en cordonnées cylindriques (r,θ,x) pour un champ scalaire $U(r,\theta,x)$ et un champ vectoriel $\vec{A} = A_r(r,\theta,x)\widehat{u}_r + A_\theta(r,\theta,x)\widehat{u}_\theta + A_x(r,\theta,x)$:

$$\vec{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial r}\widehat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\widehat{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial x}\widehat{u}_x \qquad \Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

$$\vec{\text{rot}}\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_x}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial x}\right)\widehat{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial r}\right)\widehat{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\widehat{u}_x$$

$$\Delta\vec{A} = \left[\Delta A_r - \frac{1}{r^2}\left(A_r + 2\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right)\right]\widehat{u}_r + \left[\Delta A_\theta - \frac{1}{r^2}\left(A_\theta - 2\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\right]\widehat{u}_\theta + [\Delta A_x]\widehat{u}_x$$

FIN DE L'ÉPREUVE

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Optique géométrique et formation des images
- Propagation d'un signal
- Amplificateur linéaire intégré
- Régime sinusoïdal forcé

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/psi