Concours commun Mines-Ponts, France

Session 2023, filière PSI

Mathématiques 2

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Partie 1 : nombre de points fixes d'une permutation
- Partie 2 : convergence en variation totale
- Partie 3 : autres estimations de distances en variation totale

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/mines/psi/2023/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

A2023 – MATH II PSI

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2023

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

1 Nombre de points fixes d'une permutation.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'intervalle entier $[\![1, n]\!] = \{1, 2, \cdots, n\}$, c'est-à-dire des bijections de $[\![1, n]\!]$ vers lui-même. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est une permutation, on appelle **point fixe** de σ tout entier $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(i) = i$.

Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est appelée un **dérangement** si elle n'a aucun point fixe. Pour tout $n \geq 1$, on note d_n le nombre de dérangements de l'intervalle entier $[\![1, n]\!]$. Par convention, on pose $d_0 = 1$.

On munit l'ensemble fini $\mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme notée P_n. Sur l'espace probabilisé fini $(\mathcal{S}_n, P_n)$, on définit la variable aléatoire X_n telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $X_n(\sigma)$ est le nombre de points fixes de la permutation σ.

On introduit enfin la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$, dont le rayon de convergence est noté R, et dont la somme sur l'intervalle de convergence $]-R, R[$ est notée s :

$$\forall x \in]-R, R[\qquad s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}\, x^n \ .$$

1 ▷ Rappeler le cardinal de $\mathcal{S}_n$. En déduire que $R \geq 1$.

2 ▷ Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant exactement k points fixes est $\displaystyle\binom{n}{k} d_{n-k}$.

En déduire que $P_n(X_n = k) = \dfrac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}$.

3 ▷ Montrer que

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad s(x)\, e^x = \frac{1}{1-x} \ .$$

En déduire que $R = 1$.

4 ▷ En partant de la relation $(1-x)s(x) = e^{-x}$ pour $x \in]-1,1[$, exprimer $\dfrac{d_n}{n!}$ pour n entier naturel, sous la forme d'une somme.

5 ▷ Montrer que la loi de la variable aléatoire X_n est donnée par

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \qquad P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \ .$$

6 ▷ Sur l'espace probabilisé fini $(\mathcal{S}_n, P_n)$, on définit, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la variable aléatoire U_i telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on ait $U_i(\sigma) = 1$ si $\sigma(i) = i$, et $U_i(\sigma) = 0$ sinon.

Montrer que U_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$.

Montrer que, si $i \neq j$, la variable U_iU_j suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

7 ▷ Exprimer X_n à l'aide des U_i, $1 \leq i \leq n$. En déduire l'espérance $\mathrm{E}(X_n)$ et la variance $\mathrm{V}(X_n)$.

8 ▷ Dans cette question, on fixe un entier naturel k. Déterminer

$$y_k = \lim_{n \to +\infty} P_n(X_n = k) \ .$$

Soit Y une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbf{N}$, et vérifiant

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad P(Y = k) = y_k \ .$$

Reconnaître la loi de Y.

9 ▷ On note G_{X_n} et G_Y les fonctions génératrices respectives des variables X_n et Y de la question précédente. Exprimer $G_{X_n}(s)$ sous forme de somme, pour s réel, et vérifier que

$$\forall s \in \mathbf{R} \qquad \lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(s) = G_Y(s) \ .$$

2 Convergence en variation totale

Dans la suite du problème, on appelle **distribution (de probabilités) sur N** toute application $x\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ telle que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x(k) = 1 \ .$$

On note $\mathcal{D}_{\mathbf{N}}$ l'ensemble des distributions de probabilités sur $\mathbf{N}$.

Si x et y sont deux distributions sur $\mathbf{N}$, on définit la **distance en variation totale** entre x et y par

$$d_{VT}(x,y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \big|x(k) - y(k)\big| \ .$$

10 ▷ Soient x, y, z trois distributions sur $\mathbf{N}$. Prouver les propriétés :

$$0 \le d_{VT}(x,y) \le 1 \ ;$$

$$d_{VT}(x,y) = 0 \iff x = y \ ;$$

$$d_{VT}(y,x) = d_{VT}(x,y) \ ;$$

$$d_{VT}(x,z) \le d_{VT}(x,y) + d_{VT}(y,z) \ .$$

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on note p_X la distribution de probabilités de X. Ainsi, p_X est l'application de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}_+$ définie par

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad p_X(k) = P(X = k) \ .$$

Il est clair que $p_X \in \mathcal{D}_{\mathbf{N}}$.

En particulier, si λ est un réel strictement positif, on appelle **distribution de Poisson de paramètre** λ l'application $\pi_\lambda\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ telle que

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad \pi_\lambda(k) = e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^k}{k!} \ .$$

11 ▷ Soient X et Y deux variables de Bernoulli, ayant respectivement pour paramètres $\lambda \in]0,1[$ et $\mu \in]0,1[$. Calculer $d_{VT}(p_X, p_Y)$.

12 ▷ Soit X une variable de Bernoulli de paramètre $\lambda \in]0,1[$. Montrer que

$$d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) = \lambda \left(1 - e^{-\lambda}\right) .$$

En déduire que

$$d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) \leq \lambda^2 .$$

On considère de nouveau les variables aléatoires X_n introduites dans la partie 1. Les questions **8.** et **9.** semblent montrer une certaine "convergence" des lois des variables X_n vers la loi de Poisson de paramètre 1. Le but de la fin de cette partie est de montrer que

$$d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0,$$

et que cette convergence est assez rapide.

13 ▷ Vérifier la relation, pour tout n entier naturel non nul,

$$2\, d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} .$$

14 ▷ Pour n entier naturel, on pose $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Prouver la majoration

$$r_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k} .$$

En déduire un équivalent simple de r_n lorsque n tend vers $+\infty$.

15 ▷ En continuant de majorer le second membre de l'égalité de la question **13.**, établir l'estimation

$$d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) \underset{n\to+\infty}{=} O\Big(\frac{2^n}{(n+1)!}\Big) .$$

On pourra faire intervenir des coefficients binomiaux.

3 Autres estimations de distances en variation totale

Si x et y sont deux distributions de probabilités sur $\mathbf{N}$, on définit l'application $x * y \colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ par

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad (x*y)(k) = \sum_{i=0}^{k} x(i)\, y(k-i) = \sum_{i+j=k} x(i)\, y(j) .$$

16 ▷ Montrer que $x * y$ est une distribution sur $\mathbf{N}$.

17 ▷ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbf{N}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Prouver la relation

$$p_{X+Y} = p_X * p_Y .$$

18 ▷ Soient $(x, y, u, v) \in (\mathcal{D}_{\mathbf{N}})^4$. Montrer que, pour tout k entier naturel,

$$\big|(x*y)(k) - (u*v)(k)\big| \leq \sum_{i+j=k} y(j)\, \big|x(i) - u(i)\big| + \sum_{i+j=k} u(i)\, \big|y(j) - v(j)\big| .$$

19 ▷ Avec les notations de la question précédente, établir l'inégalité

$$d_{VT}(x*y, u*v) \leq d_{VT}(x,u) + d_{VT}(y,v) .$$

20 ▷ Soit U une variable binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}^*$ et $\lambda \in]0,1[$. Prouver l'inégalité

$$d_{VT}(p_U, \pi_{n\lambda}) \leq n\,\lambda^2 \ .$$

21 ▷ Soit α un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n tel que $n > \lfloor \alpha \rfloor$, on note B_n une variable binomiale de paramètres n et $\dfrac{\alpha}{n}$. Pour tout k entier naturel, déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} P(B_n = k) \ .$$

On pourra utiliser la question précédente.

22 ▷ Soient α et β deux réels strictement positifs. En utilisant les résultats et les méthodes qui précèdent, montrer que

$$d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq |\beta - \alpha| \ .$$

Fin du problème

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Séries numériques et vectorielles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/mines/psi