Concours d'admission de l'École polytechnique et des ENS (X-ENS), France

Session 2023, filière MP

Physique et sciences de l'ingénieur

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- 1 Principe de fonctionnement d'un laser, 1.1 Cavité électromagnétique dans le domaine optique
- 1.2 Amplification optique
- 1.3 Oscillateur dans le domaine optique
- 2 Asservissement de la fréquence d'un laser continu monomode

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/x-ens/mp/2023/physique-si

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2023

MARDI 18 AVRIL 2023
14h00 - 18h00

FILIERE MP - Epreuve n° 4

PHYSIQUE ET SCIENCES DE L'INGÉNIEUR (X)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Cette composition ne concerne qu'une partie des candidats de la filière MP, les autres candidats effectuant simultanément la composition d'Informatique A.
Pour la filière MP, il y a donc deux enveloppes de Sujets pour cette séance.

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.
Les applications numériques peuvent être données avec un seul chiffre significatif.

Asservissement en fréquence d'un laser continu

Le laser, fonctionnant en régime continu, a la capacité de produire un rayonnement monochromatique et cohérent, dont la fréquence est définie très précisément. Dans ce sujet, nous nous proposons dans un premier temps de comprendre ce qui définit la fréquence de fonctionnement d'un laser continu, puis dans une seconde partie, d'en réguler la fréquence, en l'asservissant sur une référence de fréquence extérieure.

1 Principe de fonctionnement d'un laser

Un laser est un oscillateur fonctionnant dans le domaine optique, dont le principe repose sur deux ingrédients essentiels :
• un amplificateur qui permet d'amplifier une onde électromagnétique, dans le domaine spectral propre à l'optique ;
• une boucle de réaction, qui permet de réinjecter à l'entrée de l'amplificateur tout ou une partie de son signal de sortie.
L'amplification est généralement confiée à un système matériel qui peut être un atome ou une molécule en phase gazeuse, un colorant organique en solution, un ion implanté dans une matrice solide, voire la jonction entre deux semi-conducteurs dopés N et P (diode laser). Tous ces systèmes ont en commun de posséder un ou plusieurs électrons qui interagissent avec le champ électrique d'une onde électromagnétique ; ils échangent de l'énergie avec celle-là, et peuvent donc l'amplifier (ou l'amortir) selon les conditions expérimentales. Par la suite, nous appellerons génériquement ce système l' "atome".
La boucle de réaction est fournie par une cavité électromagnétique qui présente des fréquences de résonance dans le domaine optique. On peut envisager deux types de cavité selon que la cavité est constituée de deux miroirs (cavité linéaire, représentée sur la figure 1-a) ou de plus de deux miroirs (cavité en anneau, représentée sur la figure 1-b). En insérant un milieu amplificateur dans ces cavités, on obtient un laser linéaire ou en anneau.

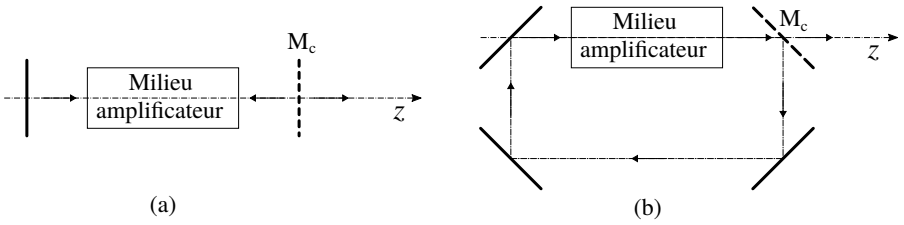


FIGURE 1 – Cavités : (a) - cavité linéaire ; (b) - cavité en anneau.

L'intérêt du laser en anneau est que l'on peut choisir dans quel sens l'onde électromagnétique va parcourir la cavité (ce qui n'est évidemment pas possible avec le laser linéaire). On supposera désormais que, dans le laser en anneau, l'onde parcourt la cavité dans le sens indiqué sur la figure 1-b. Pour ménager l'existence d'un faisceau de sortie du laser (très appréciée par la quasi-totalité des utilisateurs de lasers), un des miroirs de la cavité doit être partiellement transparent : ce miroir, représenté en pointillés sur la figure 1, est appelé miroir de couplage M_c, car il couple le champ intérieur à la cavité avec l'extérieur (et réciproquement).

1. Modélisez le laser en anneau par schéma-blocs. Justifiez votre représentation et précisez la nature physique du signal de sortie et celle d'un éventuel signal d'entrée.

   Faire de même pour le laser linéaire.

Nous allons maintenant étudier séparement les deux ingrédients essentiels du laser que sont la cavité et l'amplificateur optique. Puis nous insérerons l'amplificateur dans la cavité pour étudier les conditions de fonctionnement du laser.

• Notations et conventions utilisées dans la partie 1

Le laser que nous allons étudier ici produit une onde électromagnétique polarisée linéairement, selon l'axe Ox. Par conséquent toutes les ondes électromagnétiques étudiées dans la partie 1 auront la même propriété.

En cas de besoin, on se référera au trièdre orthonormé direct $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ pour orienter l'espace physique.

Le champ d'une onde électromagnétique plane, de pulsation ω, progressive dans la direction et le sens de l'axe Oz, et polarisée linéairement selon Ox s'écrit :

$$\vec{E}(z,t) = \vec{u}_x E(z,t) = \vec{u}_x \, E_0 \, \cos(kz - \omega t + \varphi_0) \tag{1}$$

où le module k de son vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_x$ vérifie la relation : $k = \frac{\omega}{c}$.

Nous serons amenés à utiliser la représentation complexe d'une fonction sinusoïdale réelle : pour représenter la fonction $E(z,t)$, vous poserez :

$$\underline{E}(z,t) = E_0 \, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}(kz - \omega t + \varphi_0)} \tag{2}$$

de sorte que $\underline{E}(z,t) = \mathcal{E}(z) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ avec $\mathcal{E}(z) = \mathcal{E}_0 \, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kz}$ où $\mathcal{E}_0 = E_0 \, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi_0}$ est appelée l'amplitude complexe de l'onde.

L'intérêt de cette représentation complexe d'une onde (en $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$) est qu'elle est compatible avec celle d'une onde de matière en mécanique quantique (que nous allons utiliser dans la partie 1.2).

1.1 Cavité électromagnétique dans le domaine optique

2. Cette question a pour but d'évaluer les ordres de grandeurs caractéristiques de l'optique et d'introduire le vocabulaire de l'opticien.

   2-a) On souhaite construire un laser qui produit un rayonnement de longueur d'onde (dans le vide) $\lambda_\ell \simeq 600$ nm. Calculer la période T_0 d'oscillation du champ électrique de cette onde et sa fréquence ν, en exprimant les résultats dans des unités SI adaptées à leurs ordres de grandeur.

   2-b) Les opticiens définissent souvent l'intensité lumineuse de l'onde électromagnétique [1] par la relation $I = |\underline{E}(z,t)|^2$.

   En se limitant à l'onde linéairement polarisée donnée par (1), montrer que I est directement proportionnelle à la valeur moyenne $< \Pi >_{T_0}$ sur une période T_0 du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de cette onde et donner l'expression du coefficient de proportionnalité. Préciser la signification physique du vecteur de Poynting et celle de sa valeur moyenne $< \Pi >_{T_0}$.

3. Nous allons d'abord étudier la cavité optique la plus simple qu'on puisse imaginer : cette cavité est formée de deux miroirs plans parallèles, et parfaitement réfléchissants, séparés par du vide. C'est donc une cavité linéaire (voir figure 1-a), d'axe Oz, de longueur développée L (ce qui signifie que la distance entre les deux miroirs est $L/2$) et ses miroirs peuvent être considérés comme des plans conducteurs parfaits.

   3-a) Etablir que les ondes électromagnétiques qui peuvent exister dans cette cavité sont quantifiées, et exprimer leurs fréquences ν_N en fonction de L et N.

1. et les spécialistes de traitement du signal appellent "puissance " la même quantité $|s(t)|^2$.

3-b) Décrire la dépendance spatiale du champ électrique $E(z,t)$ ou de sa représentation complexe $\underline{E}(z,t)$ oscillant dans cette cavité à la fréquence ν_N. Montrer que l'amplitude complexe $\mathcal{E}(z)$ du mode N peut toujours être choisie réelle, et tracer l'allure des représentations graphiques de $\mathcal{E}(z)$ pour les trois premiers modes de la cavité.

4. Les deux miroirs de la cavité sont nécessairement limités transversalement. Cette cavité est-elle stable latéralement (si l'onde se propage selon un axe qui fait un angle non nul avec Oz) ? Si non, comment remédier à ce problème ?

   Dans la suite, on suppose cette difficulté surmontée, et on admet qu'on pourra considérer que les ondes électromagnétiques circulant dans la cavité sont des ondes planes.

• En réalité, les miroirs de la cavité ne sont pas parfaits et engendrent des pertes, soit par absorption de l'onde lumineuse incidente, soit par transmission pour le miroir de couplage $\mathrm{M_c}$.
Le miroir de couplage est caractérisé par des coefficients de réflexion et de transmission en intensité R et T tels que $R = \dfrac{I_{réfléchi}}{I_{incident}}$ et $T = \dfrac{I_{transmis}}{I_{incident}}$. La conservation de l'énergie impose $R + T = 1 - A$ où A est la fraction de la puissance incidente qui est absorbée par le miroir. On note que le faisceau de sortie du laser représente une perte supplémentaire pour la cavité. Dans la perspective de limiter les pertes , on choisit un miroir de couplage tel que $R \gg T \gg A$.
Le ou les autres miroirs M' de la cavité sont totalement réfléchissants ; donc, pour ces miroirs, $T' = 0$ et $R' = 1 - A'$.
Pour caractériser l'efficacité de la réflexion ou de la transmission par un miroir, on peut aussi introduire les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de ce miroir, définis par $r = \dfrac{\mathcal{E}_{réfléchi}}{\mathcal{E}_{incident}}$ et $t = \dfrac{\mathcal{E}_{transmis}}{\mathcal{E}_{incident}}$, les amplitudes complexes des ondes incidente, réfléchie et transmise étant évaluées en un même point à la surface du miroir. Nous admettrons ici que ces coefficients sont réels [2] ; et on a pour le miroir de couplage : $t = \sqrt{T}$ et $r = -\sqrt{R}$ (voir note de bas de page [3]), et pour tout autre miroir, $r' = -\sqrt{R'}$ et $t' = 0$.
• Dans la perspective de limiter les pertes dans la cavité, on utilise des miroirs diélectriques multicouches qui présentent des pertes par absorption très faibles. On a typiquement $A \simeq A' \simeq 2 \times 10^{-4}$. Ainsi les pertes les plus importantes dans la cavité sont dues à la transmission du faisceau de sortie. On choisit ici $T = 4 \times 10^{-2}$.

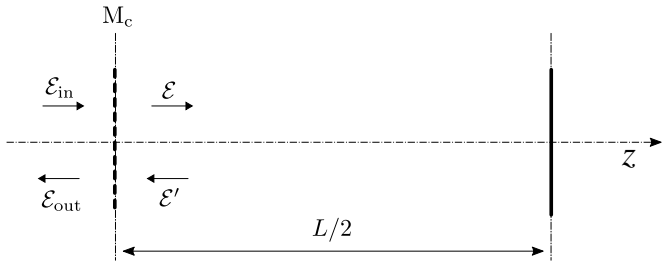


FIGURE 2 – Cavité linéaire : définitions des amplitudes complexes $\mathcal{E}_{in}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}_{out}$ des ondes incidente, aller et retour dans la cavité, et sortant de la cavité.

5. On injecte dans la cavité linéaire une onde électromagnétique d'amplitude complexe $\mathcal{E}_{in}$ (sur le miroir de couplage M_c) et de pulsation ω quelconque (ne coïncidant pas nécessairement

2. On néglige alors les éventuels déphasages introduits par la réflexion ou la transmision sur ce miroir semi-réfléchissant.

3. En effet $r < 0$ rend compte que, à la surface du miroir, le champ électrique de l'onde réfléchie est opposé à celui de l'onde incidente, pour donner un champ nul à la surface si le miroir est parfait. Vous avez utilisé cette propriété dans la question 3 ; elle est encore vraie ici parce que le champ électrique de l'onde sortante est faible par rapport à ceux des ondes progressives circulant dans la cavité, puisque $T \ll R$.

avec une des pulsations de résonance $\omega_N = 2\pi\nu_N$ de la cavité sans perte). En régime permanent, la cavité est parcourue par deux ondes d'amplitudes complexes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ se propageant selon l'axe Oz, la première dans le sens de l'axe Oz, et la seconde dans le sens opposé (voir figure 2), et il existe un faisceau de sortie d'amplitude complexe $\mathcal{E}_{out}$. Toutes les amplitudes complexes $\mathcal{E}_{in}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}_{out}$, sont définies sur le miroir de couplage M_c, c'est-à-dire au point O situé sur la surface de M_c, en $z = 0$. Enfin on pose $k = \frac{\omega}{c} > 0$.
Trouver une relation entre $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}_{in}$.
Calculer $\mathcal{E}'$ en fonction de $\mathcal{E}$, kL et r'.
En déduire l'expression de la fonction de transfert $\dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{in}}$ de la cavité avec pertes, en fonction de $\sqrt{R\,R'}$, T et kL.

6. 6-a) Exprimer $\dfrac{I}{I_{in}} = |\dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{in}}|^2$ en fonction de $\sqrt{R\,R'}$, T et $\sin(\frac{k\,L}{2})$.
Calculer $\sqrt{R\,R'}$ en fonction de T en utilisant les valeurs numériques des caractéristiques des miroirs M_c et M' et donner la signification physique du paramètre $R\,R'$.
6-b) Représenter l'allure des variations de $\frac{I}{I_{in}}$ en fonction de kL.

7. 7-a) Comparer les fréquences de résonance de la cavité avec pertes à celles des modes de la cavité sans pertes.
7-b) On définit l'intervalle spectral libre (en fréquence) de la cavité comme la différence des fréquences résonnantes consécutives (indicées N et $N + 1$) de cette cavité.
Exprimer l'intervalle spectral libre en fréquence de cette cavité, noté $\nu_{\rm ISL}$, en fonction des paramètres définissant cette cavité.
Proposer une interprétation physique de la fréquence $\nu_{\rm ISL}$ et du temps $\tau = (\nu_{\rm ISL})^{-1}$.
7-c) Dans la perspective de produire un laser fonctionnant à la longueur d'onde (dans le vide) $\lambda_\ell \simeq 600$ nm, on construit une cavité linéaire, de longueur développée $L \simeq 1{,}5$ m.
Évaluer les ordres de grandeur de l'ordre N de la résonance de la cavité (dont la fréquence de résonance ν_N coïncide approximativement avec la fréquence du laser), de l'intervalle spectral libre $\nu_{\rm ISL}$ de cette cavité et du temps τ.

8. Calculer la largeur (totale) à mi-hauteur $\Delta\omega_c$ (exprimée en pulsation) d'un pic de résonance de la cavité avec pertes.
La même grandeur exprimée en fréquence est $\Delta\nu_c = \frac{\Delta\omega_c}{2\pi}$.

9. On définit la finesse F de la cavité comme le rapport de son intervalle spectral libre par la largeur à mi-hauteur de sa résonance, exprimés l'un et l'autre en fréquence : $F = \frac{\nu_{ISL}}{\Delta\nu_c}$.
9-a) Exprimer la finesse de la cavité en fonction de L et T.
9-b) Evaluer numériquement la finesse F de la cavité et la largeur à mi hauteur $\Delta\nu_c$ exprimée en fréquence.

10. Pour déterminer le temps de confinement de l'énergie électromagnétique dans la cavité, on alimente la cavité par une onde électromagnétique $\mathcal{E}_{in}$ dont la fréquence coïncide exactement avec la fréquence de résonance ν_N de la cavité, et à l'instant $t_0 = 0$, on coupe le faisceau d'entrée $\mathcal{E}_{in}$ (voir fig. 2).
10-a) Exprimer l'énergie électromagnétique W contenue dans la cavité à l'instant t_0, en fonction de $\mathcal{E}$. On supposera les faisceaux lumineux cylindriques et de section S.
10-b) Exprimer l'énergie δW sortant de la cavité par le faisceau de sortie $\mathcal{E}_{out}$ pendant le temps τ mis par l'onde électromagnétique pour faire un aller-retour dans la cavité.
10-c) En supposant $\delta W \ll W$, en déduire l'équation différentielle décrivant l'évolution au cours du temps de l'énergie électromagnétique contenue dans la cavité.
10-d) Exprimer le temps caractéristique τ_W de dissipation de l'énergie en fonction du temps τ et de la finesse F de la cavité.
Évaluer numériquement τ_W.

1.2 Amplification optique

Nous nous intéressons ici à l'interaction entre une onde électromagnétique, supposée polarisée selon Ox, dont le champ électrique est $\vec{E} = \vec{u}_x E_0 \cos(kz - \omega t + \varphi_0)$, et un système matériel actif que nous appelons "atome". Cet atome doit être traité comme un système quantique. Nous l'assimilerons à un atome à un électron actif ; pour décrire l'état (interne) de ce système, nous introduisons sa fonction d'onde $\psi(x, y, z; t)$ qui est une fonction des coordonnées x, y, z de l'électron actif dans l'espace 3D, paramétrée par le temps t. $\psi(x, y, z; t)$ caractérise entièrement l'état de l'électron actif, et par conséquent l'état interne de l'atome étudié [4].
Nous allons d'abord nous intéresser à la fonction d'onde décrivant le système isolé. Si l'atome est isolé, l'électron actif ne peut interagir qu'avec le reste du système, c'est-à-dire le "noyau". Ceci se traduit par une énergie potentielle d'interaction [5] $V(x, y, z)$ dépendant de la position de l'électron, dont l'origine physique est principalement due aux interactions électrostatiques entre l'électron actif et les autres constituants du système étudié. Cette énergie potentielle d'interaction a pour effet de confiner l'électron actif au voisinage du noyau, ce qui se traduit par le fait que les énergies de l'atome sont quantifiées.
Par la suite, nous considérerons de plus que cet atome "vit" dans un espace physique à une dimension, restreint à l'axe Ox. Dans ces conditions, la fonction d'onde décrivant l'état du système devient $\psi(x; t)$ et ne dépend plus que de la seule coordonnée x de l'électron actif. Il en est de même pour l'énergie potentielle $V(x)$. L'évolution de cette fonction d'onde est décrite par l'équation de Schrödinger à une dimension dans le potentiel $V(x)$:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t) \tag{3}$$

où m est la masse de l'électron actif.
Nous allons maintenant nous intéresser à un état stationnaire "a" de cet atome (isolé), d'énergie E_a, décrit par sa fonction d'onde φ_a.

11. Qu'appelle-t-on état stationnaire d'un système isolé ?
    Dans votre réponse à cette question, vous veillerez à aborder les points suivants :
    (i) Si l'atome est dans l'état stationnaire φ_a, comment s'écrit sa fonction d'onde $\psi(x; t)$? Préciser la fonction caractérisant sa dépendance en t.
    (ii) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la fonction φ_a ?
    (iii) De quelle(s) variable(s) dépend la fonction φ_a ? Dépend-elle du temps ? Quelle relation de normalisation lui est-elle imposée ?

12. Pour donner consistance à la notion d'état stationnaire, supposons que l'électron actif est confiné au voisinage du noyau (situé en $x = 0$) par le puits de potentiel infini défini par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\dfrac{\ell}{2} \leqslant x \leqslant +\dfrac{\ell}{2} \\ \infty & \text{si } x < -\dfrac{\ell}{2} \text{ ou } x > \dfrac{\ell}{2} \end{cases} \tag{4}$$

    12-a) Déterminer les états stationnaires φ_n de ce système et leurs énergies E_n (vous pourrez remarquer que vous avez déjà répondu à une question analogue, dans un cadre différent, en

4. La mécanique quantique restant de la mécanique, il est utile de préciser dans quel référentiel on se place : x, y, z sont les coordonnées de l'électron actif dans le référentiel du centre de masse de l'atome. Dans tous les cas, le "noyau" de l'"atome" (c'est-à-dire tout le système matériel, hormis l'électron actif) a une masse beaucoup plus élevée que celle de l'électron, et le centre de masse de l'atome se confond avec celui de son "noyau" (qui est donc situé en $x = 0, y = 0, z = 0$). $\psi(x, y, z; t)$ caractérise donc l'état interne de l'atome.
L'atome aussi peut se déplacer dans l'espace (surtout s'il est en phase gazeuse), mais on ne s'intéresse pas ici à son mouvement d'ensemble. Pour simplifier, nous considérerons l'atome comme étant fixe dans le référentiel du laboratoire.

5. En mécanique quantique, $V(x, y, z)$ est souvent appelé le potentiel ; en fait ce potentiel est toujours une énergie potentielle.

question 3).
Tracer l'allure des représentations graphiques de $\varphi_n(x)$ pour l'état fondamental et les deux premiers états excités de ce système.
12-b) Montrer que les fonctions $\varphi_n(x)$ peuvent toujours être choisies réelles et sont de parité définie (elles sont soit paires, soit impaires). Interpréter ce dernier résultat.
12-c) En définissant le produit scalaire de deux fonctions réelles d'une variable réelle f et g par :

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x \tag{5}$$

montrer que les états stationnaires φ_n et φ_p distincts $n \neq p$ (avec $n, p \in \mathbb{N}^*$) sont orthogonaux au sens du produit scalaire (5).

• Pour décrire les échanges d'énergie entre un atome à un électron actif avec une onde électromagnétique, nous avons besoin de ne prendre en compte que deux seulement de ses niveaux d'énergie, d'énergies E_a et E_b (avec $E_a < E_b$) : nous serons alors en mesure de décrire l'absorption d'énergie électromagnétique par l'atome initialement dans le niveau d'énergie E_a ou le processus inverse, c'est-à-dire l'émission [6] d'énergie électromagnétique par l'atome initialement dans le niveau d'énergie E_b. De plus, pour simplifier, nous allons considérer que chacun de ces deux niveaux est non dégénéré, ce qui signifie que l'atome ne possède qu'un seul état stationnaire φ_a d'énergie E_a, et qu'un seul état stationnaire φ_b d'énergie E_b. Le système étudié est ainsi ramené à un système à deux états stationnaires.
• Par ailleurs, on peut montrer que les propriétés générales des états stationnaires d'une particule confinée par le potentiel (4) qui ont été démontrées aux questions 12-b et 12-c se généralisent aux états stationnaires d'une particule confinée par un potentiel $V(x)$ quelconque [7], et par conséquent au système matériel qui nous intéresse ici, dès lors que les deux états stationnaires φ_a et φ_b sont deux états liés, pour lesquels l'électron actif est confiné au voisinage du noyau. Donc vous admettrez que $\varphi_a(x)$ et $\varphi_b(x)$ sont deux fonctions réelles, orthogonales (et même orthonormées) au sens du produit scalaire (5). Elles sont aussi orthogonales à tout autre état stationnaire de l'atome.

13. L'atome étant toujours isolé, on envisage maintenant la situation où il est dans une superposition d'états stationnaires φ_a et φ_b ; sa fonction d'onde $\psi(x,t)$ est donc une combinaison linéaire des deux états stationnaires $\varphi_a(x)$ et $\varphi_b(x)$, soit :

$$\psi(x,t) = a(t)\, \varphi_a(x) + b(t)\, \varphi_b(x) \tag{6}$$

13-a) Justifier que l'espace des états (c'est-à-dire l'ensemble des fonctions d'onde $\psi(x;t)$ accessibles, avant normalisation de ψ) est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, normé, de dimension 2 et dont l'ensemble des deux états stationnaires $\{\varphi_a, \varphi_b\}$ forme une base.

13-b) Nous souhaitons déterminer comment cet état évolue au cours du temps.
Montrer que la structure algébrique de l'espace des états permet d'écrire l'équation de Schrödinger vérifiée par $\psi(x,t)$ sous la forme :

$$\mathrm{i}\hbar \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_a & 0 \\ 0 & E_b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \tag{7}$$

où $\psi(x,t)$ est représentée dans la base $\{\varphi_a, \varphi_b\}$ par la matrice colonne $\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$.
En déduire les expressions des coefficients $a(t)$ et $b(t)$ en fonction du temps t et de leurs

6. Il s'agit ici de l'émission induite (par le rayonnement) introduite par A. Einstein.
7. pourvu qu'il conduise à des états liés de la particule.

valeurs initiales $a(0)$ et $b(0)$.

13-c) Expliquer la signification physique des coefficients $a(t)$ et $b(t)$, et des grandeurs $p_a = |a(t)|^2$ et $p_b = |b(t)|^2$.

Montrer que les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ sont reliés par une relation supplémentaire, dont on précisera la signification physique.

• Nous allons maintenant induire une transition entre les états a et b, en illuminant l'atome par l'onde électromagnétique présente dans la cavité. L'énergie d'interaction entre l'atome et le rayonnement est donnée par l'énergie dipolaire électrique $V_{int} = -\vec{D}\cdot\vec{E}$ du dipôle atomique $\vec{D}$ dans le champ électrique $\vec{E}(z,t) = \vec{u}_x\, E_0\, \cos(kz - \omega t + \varphi_0)$ de l'onde électromagnétique. D'où :

$$V_{\text{int}} = -D_x\, E_0\, \cos(kz - \omega t + \varphi_0) \tag{8}$$

Dans la suite, on supposera que l'atome est situé dans le plan $z = 0$ et on prendra $\varphi_0 = 0$.

• En fait le dipôle atomique (ou sa composante D_x selon Ox) dépend de l'état stationnaire dans lequel est cet atome, comme en dépend son énergie interne (cette énergie interne est E_a si l'atome est dans l'état stationnaire φ_a et E_b dans l'état φ_b). C'est pourquoi, dans l'équation d'évolution de sa fonction d'onde $\psi(x,t) = a(t)\varphi_a(x) + b(t)\,\varphi_b(x)$, le dipôle atomique va intervenir, non pas comme une constante, mais comme une matrice 2×2.

Dans le référentiel du centre de masse de l'atome, le système noyau + électron actif (situé en x, y, z) a un dipôle électrique dont la composante selon Ox est $D_x = -ex$. On s'attend donc à ce que la matrice 2×2 représentant D_x dans la base $\{\varphi_a, \varphi_b\}$ soit :

$$\begin{pmatrix} D_{aa} & D_{ab} \\ D_{ba} & D_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \varphi_a^*(x)\,(-ex)\,\varphi_a(x)\mathrm{d}x & \int \varphi_a^*(x)\,(-ex)\,\varphi_b(x)\mathrm{d}x \\ \int \varphi_b^*(x)\,(-ex)\,\varphi_a(x)\mathrm{d}x & \int \varphi_b^*(x)\,(-ex)\,\varphi_b(x)\mathrm{d}x \end{pmatrix} \tag{9}$$

14. Évaluer ces intégrales pourrait être délicat, car nous ne connaissons pas les fonctions φ_a et φ_b. Néanmoins nous savons qu'elles peuvent être choisies réelles. Et nous avons pu déterminer les états stationnaires de l'atome en modélisant l'énergie d'interaction de l'électron actif avec le noyau par un puits de potentiel infini (4). Dans un premier temps, nous allons nous servir de ce modèle pour déterminer la matrice 2×2 ci-dessus.

14-a) En assimilant les états stationnaires $\varphi_a(x)$ et $\varphi_b(x)$ à deux des trois états stationnaires φ_n du puits de potentiel infini (dans un premier temps, on prendra $\varphi_a = \varphi_1$ et $\varphi_b = \varphi_2$), montrer que $\begin{pmatrix} D_{aa} & D_{ab} \\ D_{ba} & D_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix}$ où $d = D_{ab}$ est une grandeur réelle ($d \in \mathbb{R}$) qu'on ne cherchera pas à calculer.

Comment choisir les états stationnaires φ_a et φ_b pour que d ne soit pas nul ?

14-b) Montrer que l'énergie d'interaction entre l'atome et l'onde électromagnétique V_{int} s'exprime dans le sous-espace vectoriel de base $\{\varphi_a, \varphi_b\}$ sous la forme d'une matrice 2×2 de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & f(t) \\ f(t) & 0 \end{pmatrix} = f(t) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

et exprimer la fonction $f(t)$. On introduira la grandeur $\Omega_R = \frac{d\,E_0}{\hbar}$, appelée pulsation de Rabi [8].

14-c) En déduire l'équation de Schrödinger décrivant l'évolution de la fonction d'onde $\psi(x,t) = a(t)\varphi_a(x) + b(t)\varphi_b(x)$ de cet atome interagissant avec le rayonnement.

Montrer que les coefficients $a(t)$ et $b(t)$ vérifient le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -\mathrm{i}\dfrac{E_a}{\hbar}a(t) + \mathrm{i}\Omega_R \cos(\omega t)\, b(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} &= -\mathrm{i}\dfrac{E_b}{\hbar}b(t) + \mathrm{i}\Omega_R \cos(\omega t)\, a(t) \end{cases} \tag{10}$$

8. Isidor Rabi est un physicien américain qui a reçu le prix Nobel de physique en 1944.

• Évidemment le modèle du puits de potentiel infini n'est absolument pas réaliste pour déterminer les états stationnaires d'un atome à un électron actif : si on prend l'exemple de l'atome d'hydrogène, déterminer les états stationnaires de l'atome d'hydrogène nécessiterait de prendre en compte le caractère tridimensionnel de l'atome d'hydrogène et l'existence de l'interaction Coulombienne entre l'électron et le noyau (en d'autres termes, le potentiel $V(x)$ du puits de potentiel infini devrait être remplacé par l'énergie potentielle $V(x,y,z) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$).
Mais le potentiel $V(x,y,z)$ de l'atome d'hydrogène possède la même symétrie en x que le potentiel $V(x)$ du puits de potentiel infini (1D), et par conséquent les états stationnaires de l'atome d'hydrogène (3D) ont une parité bien déterminée vis à vis de la variable x, conmme les états stationnaires du modèle du puits de potentiel infini (1D). Et cette propriété de symétrie reste vraie pour beaucoup de systèmes matériels, atome, molécule, ion, etc, envisagés pour construire un laser (éventuellement en moyennant sur toutes les orientations possibles de ce système matériel isolé).
Ainsi, dès lors que le système matériel étudié se laisse modéliser comme un "atome" à un électron actif, possédant deux états stationnaires φ_a et φ_b, d'énergies respectives E_a et E_b, ayant une parité bien déterminée vis à vis de x, et couplés par un élément de matrice $D_{ab} = d$ non nul (ce qui suppose que les deux états stationnaires sont de parités opposées), l'évolution de la fonction d'onde $\psi(t) = a(t)\varphi_a + b(t)\varphi_b$ obéit au système d'équations différentielles (10).

• Pour simplifier ces équations (10), on va introduire deux nouvelles variables $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ définies par :

$$\alpha(t) = \exp\left(+\mathrm{i}\frac{E_a}{\hbar}t\right) a(t) \quad \text{et} \quad \beta(t) = \exp\left(+\mathrm{i}\frac{E_a}{\hbar}t\right) \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t} b(t) \tag{11}$$

Par ailleurs, on pose $\hbar\omega_0 = E_b - E_a$ et $\delta\omega = \omega - \omega_0$: ω_0 est la pulsation de la résonance atomique entre les niveaux a et b (avec $E_b > E_a$) et $\delta\omega$ est l'écart à la résonance, exprimé en pulsation. Si on veut avoir quelque chance d'exciter une transition entre les états a et b, on choisira la pulsation de l'onde lumineuse voisine de la pulsation de résonance ω_0, de sorte que $|\delta\omega| \ll \omega_0 \simeq \omega$.

15. Écrire les équations différentielles vérifiées par $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, en veillant à développer $\cos(\omega t)$ en exponentielles complexes, de façon à clairement mettre en évidence les termes contribuant à des variations lentes ou rapides de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.

• Dans la mesure où nous nous intéressons à l'évolution de la fonction d'onde $\psi(x,t)$ aux temps longs par rapport à la période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ de l'onde électromagnétique, nous pouvons négliger les termes oscillant à haute fréquence, de l'ordre de ω, devant ceux à plus basse fréquence, qui décrivent les variations lentes de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$. Cette approximation est appelée l'approximation séculaire. Dans le cadre de cette approximation, les équations d'évolution de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ deviennent :

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\frac{\Omega_R}{2}\beta(t) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\delta\omega\,\beta(t) + \mathrm{i}\frac{\Omega_R}{2}\alpha(t) \tag{12}$$

16. L'atome est dans une superposition d'états stationnaires $\psi(x,t) = a(t)\varphi_a(x) + b(t)\varphi_b(x)$.
16-a) Exprimer la densité de probabilité de présence en x de l'électron en fonction de $\psi(x,t)$
En déduire la probabilité élémentaire $\mathrm{d}\mathcal{P}$ que l'électron soit situé entre x et $x + \mathrm{d}x$.
Exprimer la valeur moyenne $< D_x >$ (sur toutes les valeurs possibles de x) du dipôle atomique $-ex$.

16-b) Exprimer $< D_x >$ en fonction de $a(t)$, $b(t)$ et des intégrales D_{aa}, D_{ab}, D_{ba}, D_{bb} introduites par la relation (9).
Ce résultat montre l'intérêt des variables $a^*\,a$, $b^*\,b$ et $b^*\,a$ et donc des variables $\alpha^*\,\alpha$, $\beta^*\,\beta$ et $\beta^*\,\alpha$ pour représenter l'état de l'atome lorsqu'il est dans une superposition de deux états stationnaires (ici φ_a et φ_b).

16-c) Donner l'interprétation physique des variables réelles $\alpha^*\,\alpha$ et $\beta^*\,\beta$.
Montrer qu'il existe une relation simple entre ces deux variables.

A contrario, la variable $C = \beta^* \alpha$ est une variable complexe, qu'on appelle usuellement cohérence.
16-d) Exprimer $< D_x >$ en fonction de $d = D_{ab}$, $a(t)$ et $b(t)$, puis en fonction de d, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et ωt. En déduire que $< D_x >$ est uniquement relié à la cohérence C.

16-e) On introduit les variables réelles u et v telles que : $C = \beta^* \alpha = \frac{1}{2}(u + \mathrm{i}v)$.
Montrer que :

$$< D_x >= d\,[u\cos(\omega t) - v\sin(\omega t)] \tag{13}$$

• Il apparaît clairement que les variables p_a, p_b et C sont bien adaptées à la description de l'état quantique de l'atome et de son dipôle électrique. Les équations différentielles décrivant leurs évolutions au cours du temps se déduisent sans difficulté de (12) ; on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}p_a}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}p_b}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\frac{\Omega_R}{2}(C - C^*) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\delta\omega C - \mathrm{i}\frac{\Omega_R}{2}(p_a - p_b) \tag{14}$$

On pose $m = p_a - p_b$.
• Nous venons de déterminer l'évolution de l'état quantique de l'atome sous l'effet de l'interaction avec le rayonnement, en l'occurrence ici le champ $\vec{E}(z,t) = \vec{u}_x E_0 \cos(kz - \omega t + \varphi_0)$. Mais cet atome est soumis à d'autres effets qui affectent aussi l'évolution de son état quantique : ce sont l'émission spontanée de rayonnement [9] par cet atome et l'effet des interactions de cet atome avec son environnement (collisions dans un gaz, interactions avec son environnement, liquide ou solide, à l'échelle microscopique) que nous désignons ici sous le terme générique de "collisions".
L'émission spontanée a tendance à faire décroître la probabilité p_b de trouver l'atome dans l'état b selon la loi exponentielle $\left.\frac{\mathrm{d}p_b}{\mathrm{d}t}\right|_{e\,sp} = -\gamma_b p_b$ où $\tau_b = \frac{1}{\gamma_b}$ est la durée de vie de l'état b par émission spontanée. Il en est de même pour l'état a qu'on suppose ici être un état excité, de durée de vie radiative $\tau_a = \frac{1}{\gamma_a}$. Enfin la cohérence $C = \beta^* \alpha$ entre les états a et b décroît aussi selon une loi exponentielle $\left.\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}\right|_{e\,sp} = -\gamma_{ab} C$, avec $\gamma_{ab} = \frac{1}{2}(\gamma_a + \gamma_b)$.
Les collisions ont un effet similaire ; par conséquent les constantes d'amortissement $\gamma_b, \gamma_a, \gamma_{ab}$ en sont augmentées (et donc les durées de vie correspondantes sont diminuées). mais les collisions affectent beaucoup plus la cohérence C que les probabilités p_b et p_a, et γ_{ab} devient notablement plus grand que γ_a ou γ_b. Pour simplifier, nous admettrons ici que, en présence de collisions, $\gamma_a \simeq \gamma_b \simeq \gamma_1 = \frac{1}{\tau_1}$ et que $\gamma_{ab} = \gamma_2 = \frac{1}{\tau_2}$ est significativement plus grand que γ_1.
• On retiendra que la prise en compte conjointe de l'émission spontanée et des collisions conduit à des termes de relaxation des grandeurs p_b, p_a et C donnés par :

$$\left.\frac{\mathrm{d}p_b}{\mathrm{d}t}\right|_R = -\gamma_1\, p_b \quad ; \quad \left.\frac{\mathrm{d}p_a}{\mathrm{d}t}\right|_R = -\gamma_1\, p_a \quad ; \quad \left.\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}\right|_R = -\gamma_2\, C \tag{15}$$

où $\tau_1 = (\gamma_1)^{-1} \sim 10$ ns et $\tau_2 = (\gamma_2)^{-1} < \tau_1$.
• De plus, on ne pourra pas obtenir de milieu amplificateur sans lui apporter en permanence des atomes excités dans l'état b, d'où un terme source $\left.\frac{\mathrm{d}p_b}{\mathrm{d}t}\right|_S = +\Lambda_b$ (avec $\Lambda_b > 0$). Par souci de symétrie, on introduira dans les équations un terme source $\left.\frac{\mathrm{d}p_a}{\mathrm{d}t}\right|_S = +\Lambda_a$ dans l'état a.

L'évolution de l'état quantique de l'atome (décrit par les variables p_a, p_b, C) s'obtient en sommant les différents processus, soit :

9. Jusqu'à maintenant, nous avons pris en compte la capacité de l'atome à émettre un rayonnement par le processus d'émission induite (induite par le rayonnement dans lequel baigne l'atome), mais nous n'avons pas pris en compte l'émission spontanée de rayonnement par l'atome, qui se produit pour tout atome porté dans un niveau excité, indépendamment de la présence de l'onde électromagnétique de champ $\vec{E}(z,t)$, comme on peut aisément le vérifier en annulant le champ E_0, et par conséquence la pulsation de Rabi $\Omega_R = \frac{d\,E_0}{\hbar}$; on retrouve alors la situation étudiée à la question 14, dans laquelle $p_b = |b(t)|^2 = |b(0)|^2$ est constante, ce qui prouve bien qu'on n'a pas pris en compte l'émission spontanée par l'atome dans l'état stationnaire φ_b.

• l'interaction de l'atome avec le champ $E(z,t)$ de l'onde électromagnétique,
• les processus de relaxation (émission spontanée et collisions),
• les apports d'atomes dans les états b ou a.

17. Pour décrire le milieu amplificateur en régime permanent, nous nous intéressons à l'état stationnaire de ce système.
17-a) Écrire les équations vérifiées en régime permanent par les variables p_a, p_b, C.

17-b) Déterminer la solution stationnaire de ce système dans le cas où le milieu n'est soumis à aucune onde électromagnétique, c'est-à-dire si l'amplitude E_0 de cette onde est nulle, donc si la pulsation de Rabi $\Omega_R = \frac{d\,E_0}{\hbar}$ est nulle. On appelera p_a^0, p_b^0 et C_0 les valeurs des paramètres ainsi obtenues.
Justifier que la cohérence entre les deux états a et b de l'atome n'est créée que par l'interaction de l'atome avec l'onde électromagnétique.

• En présence d'une onde électromagnétique (donc si $\Omega_R \neq 0$), ce système admet pour solutions :
$p_a + p_b = p_a^0 + p_b^0$ où p_a^0 et p_b^0 sont les solutions stationnaires en l'absence de champ électromagnétique.

$$p_a - p_b = m = m_0 \frac{\delta\omega^2 + {\gamma_2}^2}{\delta\omega^2 + {\gamma_2}^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}{\Omega_R}^2}$$

$$C = \tfrac{1}{2}(u + \mathrm{i}v) \quad \text{avec} \begin{cases} u &= -m_0\Omega_R \dfrac{\delta\omega}{\delta\omega^2 + {\gamma_2}^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}{\Omega_R}^2} \\ v &= -m_0\Omega_R \dfrac{\gamma_2}{\delta\omega^2 + {\gamma_2}^2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}{\Omega_R}^2} \end{cases}$$

où on a utilisé les notations suivantes : $m_0 = p_a^0 - p_b^0$, $p_a^0 = \frac{\Lambda_a}{\gamma_1}$ et $p_b^0 = \frac{\Lambda_b}{\gamma_1}$.

17-c) Calculer la valeur moyenne du dipôle électrique atomique en régime stationnaire. On rappelle le résultat (13) de la question 16-e : $< D_x >= d\,[u\cos(\omega t) - v\sin(\omega t)]$.

17-d) Le milieu amplificateur est constitué de n "atomes" par unité de volume. La polarisation P de ce milieu est son moment dipolaire par unité de volume : $P = n\ < D_x >$.
Déterminer la polarisation P du milieu amplificateur en régime stationnaire et montrer qu'elle oscille à la pulsation ω.
Écrire la représentation complexe $\mathcal{P}$ de P (avec la représentation complexe définie par la relation (2)), et montrer qu'on peut l'écrire sous la forme $\mathcal{P} = \epsilon_0\,\underline{\chi}\,\underline{\mathrm{E}}(z=0,t)$, où $\underline{\chi} = \chi' + \mathrm{i}\chi''$ est la susceptibilité complexe du milieu amplificateur. On rappelle que $\Omega_R = \frac{d\,E_0}{\hbar}$.
Calculer les parties réelle χ' et imaginaire χ'' de $\underline{\chi}$ en fonction de $\delta\omega$.

• En toute rigueur, parce que nous avons supposé que l'atome étudié est situé dans le plan $z = 0$, nous venons de montrer que, dans ce plan, la représentation complexe de la polarisation $\underline{P}(z=0,t)$ est reliée au champ électrique complexe $\underline{E}(z=0,t)$ dans le même plan par la relation $\underline{P}(z=0,t) = \epsilon_0\underline{\chi}\underline{E}(z=0,t)$. Mais parce que la relation obtenue est locale, il est bien évident qu'on obtient la même relation dans n'importe quel plan z (en remplaçant E_0 par $\mathcal{E}(z)$).

18. Nous considérons maintenant un milieu amplificateur occupant un volume cylindrique, d'axe Oz, de longueur ℓ_a et de section S qui est traversé par un faisceau lumineux se propageant dans le sens de l'axe Oz (voir fig. 1-b).
En présence d'une polarisation $P(z,t)$, de représentation complexe $\underline{P}(z,t)$, l'équation de propagation selon Oz du champ électrique $E(z,t)$ de l'onde électromagnétique plane, devient, en notation complexe :

$$\frac{\partial^2\underline{E}(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{E}(z,t)}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\underline{P}(z,t)}{\partial t^2} \tag{16}$$

18-a) En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\mathcal{E}(z)$, amplitude complexe du champ électrique dans le plan z (on négligera ici l'éventuelle dépendance de $\underline{\chi}$ en z).

18-b) On recherche une solution de cette équation de la forme $\mathcal{E}(z) = E_0\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\underline{k}z}$ où $\underline{k} = k' + \mathrm{i}\,k''$ est une grandeur complexe (avec $k', k'' \in \mathbb{R}$).
Ecrire l'équation vérifiée par la variable complexe $\underline{k}$.

On pourra éventuellement introduire un indice (optique) complexe $\underline{n} = n' + \mathrm{i}\,n''$ (avec $n', n'' \in \mathbb{R}$) défini par $\underline{n}^2 = 1 + \underline{\chi}$.
18-c) On considère ici que le milieu amplificateur est dilué, au sens où les "atomes" actifs y ont une faible densité volumique n. Puisque $\underline{\chi}$ est proportionnel à n, on supposera ici que la densité volumique des atomes actifs est suffisamment faible pour que $|\underline{\chi}| \ll 1$.
Dans cette hypothèse, déterminer les valeurs de k' et de k'' en fonction de χ' et χ''.
Puis montrer qu'amplifier l'onde électromagnétique qui traverse le milieu suppose que $\chi'' < 0$.
Que se passe t'il si cette égalité n'est pas satisfaite ?

18-d) Montrer que, pour satisfaire cette inégalité, il faut réaliser l'inversion des populations des états a et b. Définir précisement ce qu'on appelle ici les populations des états a et b.
Expliquer pourquoi une vapeur constituée d'atomes actifs, même chauffée à haute température, ne constituera jamais un milieu amplificateur.

18-e) Désormais on suppose réalisée l'inversion de populations nécessaire à l'amplification de l'onde lumineuse.
On appelle respectivement $\mathcal{E}_e$ et $\mathcal{E}_s$ les amplitudes complexes $\mathcal{E}(z)$ de l'onde à son entrée et à sa sortie du milieu amplificateur, en $z = 0$ et en $z = \ell_a$ (voir fig. 1-b).
Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_e}$ en fonction de χ', χ'', ℓ_a et $k = \frac{\omega}{c}$, en supposant que la susceptibilité $\underline{\chi}$ ne dépende pas de l'intensité de l'onde qui traverse le milieu.
En déduire le coefficient d'amplification de l'intensité $G_I = \dfrac{I_s}{I_e}$.

19. 19-a) L'inversion des populations étant réalisée, représenter les variations de χ'' et de χ' en fonction de $\delta\omega$. En déduire que le système est résonnant à la pulsation ω_0.

19-b) Calculer la largeur à mi-hauteur (en pulsation) $\Delta\omega_S$ de cette résonance et montrer qu'elle dépend en général de l'intensité $I(z)$ de l'onde électromagnétique en z.
A quelle condition (portant sur $\Omega_R(z)$) en dépend-elle effectivement ? On parle alors d'élargissement de la résonance par le rayonnement, ou de saturation (d'où l'indice S de la largeur $\Delta\omega_S$). Calculer la largeur à mi-hauteur $\Delta\omega_{NS}$ en l'absence de saturation, c'est-à-dire à faible intensité $I(z)$.

19-c) Ainsi la susceptibilité $\underline{\chi}$ (et l'indice optique $\underline{n} = n' + \mathrm{i}\,n''$) du milieu amplificateur dépend de l'intensité I de l'onde se propageant dans le milieu amplificateur. Montrer que :

$$\underline{\chi} = \underline{\chi}_\ell \frac{1}{1 + \frac{I}{I_S}}$$

où I_S est l'intensité de saturation du milieu et $\underline{\chi}_\ell$ est la valeur de $\underline{\chi}$ pour les faibles valeurs de I ($I \ll I_S$), soit en régime linéaire (où la polarisation complexe $\mathcal{P}(z) = \epsilon_0 \underline{\chi}_\ell\, \mathcal{E}(z)$ du milieu amplificateur dépend linéairement du champ $\mathcal{E}(z)$ de l'onde qui le polarise).
Déterminer $\underline{\chi}_\ell$ et I_S en fonction de $\delta\omega$ et des autres paramètres du système à deux niveaux a,b.

19-d) Si on néglige les variations de l'intensité $I(z)$ de l'onde à l'échelle de la longueur d'onde, l'équation de propagation devient :

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = -k\chi''_\ell \frac{I}{1 + \frac{I}{I_S}} \qquad \text{où } k = \frac{\omega}{c} \tag{17}$$

Intégrer cette équation différentielle entre $z = 0$ et $z = \ell_a$.
Montrer que si l'intensité $I(z)$ reste partout très en deçà de l'intensité de saturation, on retrouve le régime où $I(\ell_a)$ varie exponentiellement avec ℓ_a.

Si au contraire l'intensité $I(z)$ est partout très supérieure à I_S, montrer que l'intensité $I(\ell_a)$ varie linéairement avec ℓ_a.
Le gain en intensité $G_I = \dfrac{I_s}{I_e}$ varie alors linéairement avec ℓ_a.

1.3 Oscillateur dans le domaine optique

Pour obtenir un laser, on insère l'amplificateur optique que nous venons d'étudier dans une cavité en anneau, de longueur développée $L = 1{,}5$ m, et équipée des mêmes miroirs que ceux décrits dans la partie 1.1, de sorte que toutes les caractéristiques de cette cavité sont identiques à celle de la cavité linéaire de même longueur étudiée dans la partie 1.1.
Beaucoup de lasers fonctionnent dans un régime où la saturation est atteinte. Nous allons donc étudier le fonctionnement de notre laser dans des conditions où l'intensité $I(z = 0)$ du faisceau lumineux entrant dans le milieu amplificateur dépasse très significativement l'intensité de saturation I_S (on suppose donc : $I(0) \gg I_S$). De plus nous allons supposer que ce milieu amplificateur est mince, d'épaisseur ℓ_a faible (telle que $(-k\chi'')\ell_a \ll 1$). On peut alors considérer que tout le milieu amplificateur (de $z = 0$ à $z = \ell_a$) est soumis aux mêmes conditions de saturation (c'est-à-dire que $I(\ell_a) \approx I(0)$) et peut être décrit par une susceptibilité complexe $\underline{\chi}_S$ uniforme, telle que :

$$\underline{\chi}_S = \underline{\chi}_\ell \frac{1}{1 + \frac{I(0)}{I_S}}$$

Ainsi les amplitudes complexes $\mathcal{E}_e$ et $\mathcal{E}_s$ de l'onde à son entrée et à sa sortie du milieu amplificateur sont reliées par :

$$\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_e \, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}k(1+\frac{\chi'_S}{2})\ell_a} \, \mathrm{e}^{-k\frac{\chi''_S}{2}\ell_a} \tag{18}$$

A sa sortie du milieu amplificateur, cette onde se propage dans l'air (d'indice optique $n_{air} = 1$) jusqu'au miroir de couplage M_c, qui la réfléchit partiellement ($T = 4 \times 10^{-2}$, d'où $R \simeq 1 - T$ et $r = -\sqrt{R}$), et après trois réflexions supplémentaires sur des miroirs M' ($A' \simeq 2 \times 10^{-4}$, d'où $R' \simeq 1$) revient sur la face d'entrée de l'amplificateur (en $z = 0$). Son amplitude complexe en $z = 0$ est notée $\mathcal{E}'_e$.

20. 20-a) Exprimer $\mathcal{E}'_e$ en fonction de $\mathcal{E}_s$, T, L et ℓ_a.
Identifier dans votre réponse la fonction de transfert de chacun des blocs que vous auriez pu mentionner dans la boucle de retour du laser en anneau modélisé dans la question 1.

    20-b) En déduire le rapport $\dfrac{\mathcal{E}'_e}{\mathcal{E}_e}$, qui peut s'interpréter comme la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ de l'amplitude complexe du champ électrique dans la cavité, en un tour de cavité.
    Montrer que ce rapport s'écrit sous la forme $A\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi}$, où A et φ sont deux réels qu'on exprimera en fonction des paramètres caractéristiques du laser.

    20-c) En régime stationnaire, on a $\mathcal{E}'_e = \mathcal{E}_e$. Montrer qu'on obtient ainsi deux équations qui permettent de déterminer le "point de fonctionnement" du laser, c'est-à-dire sa pulsation ω et l'intensité $I(0)$ de l'onde lumineuse circulant dans la cavité (et par conséquent le niveau de saturation du milieu amplificateur).

    20-d) A partir de ces deux équations, montrer que :
    (i) la pulsation ω du laser est toujours très proche de la pulsation ω_N du mode N de la cavité en anneau quand cette cavité est vide, c'est-à-dire sans amplificateur optique. Interpréter l'origine physique de la différence entre ω et ω_N.
    (ii) la seconde équation exprime qu'en régime stationnaire, la variation d'intensité $I(\ell_a) - I(0)$ créée par l'amplificateur compense les pertes de la cavité, c'est-à-dire ici l'intensité du faisceau de sortie du laser. Interpréter ce résultat en termes de bilan d'énergie.

• Dans cette étude, nous avons implicitement considéré que le milieu amplificateur est homogène et que tous ses "atomes" contribuent à un fonctionnement du laser à la même pulsation ω_N voisine de ω_0. En réalité, le milieu amplificateur n'est jamais homogène, et il va pouvoir émettre un rayonnement dans une plage de fréquences $\Delta\nu_i$, appelée largeur inhomogène de la transition observée [10]. $\Delta\nu_i$ représente le domaine spectral où le laser peut fonctionner. Si $\Delta\nu_i > \nu_{\text{ISL}}$, le laser peut fonctionner simultanément sur plusieurs modes de la cavité, de N différents. En fait beaucoup de lasers ont une tendance naturelle à fonctionner en régime multimode [11].
• La seule façon d'obtenir un laser de faible largeur spectrale (inférieure à l'intervalle spectral libre ν_{ISL} de la cavité laser) est de rendre ce laser monomode, c'est-à-dire de l'obliger à ne fonctionner que sur un seul mode. On y parvient en instaurant des pertes supplémentaires pour tous les modes, excepté celui qu'on veut conserver. Pour cela on introduit dans la cavité du laser plusieurs éléments sélectifs, tous accordés à la fréquence ν_N du mode à conserver, donc sans perte à la fréquence ν_N, mais qui introduisent des pertes importantes pour tous les autres modes d'ordre $N' \neq N$. Il faut en général plusieurs éléments sélectifs (voir fig. (3)). On obtient alors un laser monomode, fonctionnant uniquement sur le mode d'ordre N, donc à une fréquence très proche de ν_N. On peut alors espérer que sa largeur spectrale soit inférieure ou de l'ordre de $\Delta\nu_c$ avant tout asservissement en fréquence.

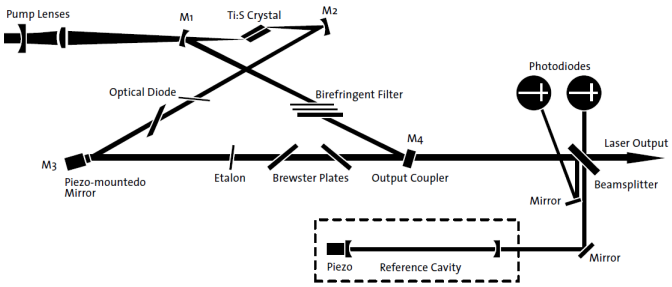


FIGURE 3 – Laser titane saphir en anneau monomode : deux éléments sélectifs y ont été introduits : une lame mince (etalon) qui est une cavité de grand intervalle spectral libre et un filtre de Lyot (birefringent filter) dont le rôle est d'empêcher les modes lointains de laser. La cavité (reference cavity) est utilisée avec les photodiodes pour contrôler la fréquence du faisceau de sortie du laser, mais n'a aucun rapport avec un éventuel asservissement de la fréquence de ce laser.

2 Asservissement de la fréquence d'un laser continu monomode

21. Représenter la structure élémentaire d'un système asservi à une consigne $Co(p)$ par un schéma-bloc composé de trois blocs :
    (a) le système à asservir, de fonction de transfert $H(p)$;
    (b) un bloc capteur (ou détecteur), de fonction de transfert $K(p)$, qui constitue la boucle de retour ;
    (c) un bloc correcteur, de fonction de transfert $C(p)$;

    et d'un comparateur entre une consigne $Co(p)$ et le signal délivré par le capteur (parfois appelé signal de mesure).
    Indiquer comment est formé le signal d'erreur. Décrire sommairement le rôle du capteur et celui du correcteur.

10. Le mécanisme de cet élargissement diffère selon la nature du milieu amplificateur : dans un milieu solide ou liquide, l'atome actif est perturbé par son environnement microscopique, et tous les atomes actifs n'ont pas rigoureusement le même environnement, d'où une dispersion des valeurs possibles de ω_0. Dans un milieu gazeux, l'hétérogénéïté vient de la dispersion des vitesses des atomes mesurées dans le référentiel (fixe) de la cavité, ce qui se traduit par un élargissement Doppler de la raie de transition b $\rightarrow$ a.

11. Sauf les diodes laser intégrées, dont la cavité est le milieu amplificateur, et a une longueur développée millimétrique.

Déterminer les fonctions de transfert en boucle ouverte $F_O(p)$ et en boucle fermée $F(p)$ du système asservi.

Nous allons maintenant adapter ce schéma-bloc à l'asservissement de la fréquence d'un laser. Dans cette perspective, nous allons nous intéresser successivement à chacun des trois blocs mentionnés dans la question précédente et déterminer leur fonction de transfert. Commençons par le système à asservir, le laser monomode.

22. Nous n'avons pas effectué une étude dynamique du comportement du laser, mais nous avons identifié un certain nombre de temps caractéristiques de son fonctionnement, qui sont soit des périodes d'oscillation, soit des temps de relaxation : il s'agit, pour la partie optique, de la période T_0 d'oscillation du champ électrique de l'onde, du temps $\tau = (\nu_{\mathrm{ISL}})^{-1}$ et du temps d'amortissement de l'énergie électromagnétique dans la cavité $\tau_W \simeq 100$ ns, et pour l'"atome", le temps de relaxation τ_1 des populations d'atomes dans les états a et b, de l'ordre de 10 ns, et celui de la cohérence C entre ces deux états, plus court ($\tau_2 < \tau_1$). Enfin vous connaissez l'ordre de grandeur $\Delta\nu_c$ de la largeur spectrale du laser monomode avant asservissement.
Quand on ne dispose que de ce type d'informations sur la dynamique temporelle d'un système, on modélise souvent le système comme un système d'ordre 1, passe-bas, dont la fréquence de coupure est obtenue par le principe du pôle dominant, c'est-à-dire le pôle dont la fréquence caractéristique est la plus basse.
Proposez une valeur de la fréquence de coupure du laser considéré comme un filtre passe bas et écrire la fonction de transfert correspondante $H(p)$.

23. Pour asservir la fréquence ν du laser monomode à une référence extérieure fixe ν_0, il faut pouvoir agir en temps réel sur la fréquence du laser en réponse à la différence $\nu - \nu_0$.
Sur quel paramètre physique du laser faut-il agir ?

Stabiliser la fréquence du laser monomode nécessite plusieurs éléments :
• D'abord il faut disposer d'une référence de fréquence ν_0. Le plus simple est d'utiliser une nouvelle cavité optique, de longueur développée L_0, dont les fréquences de résonance [12] $\nu_0 = N_0 \frac{c}{L_0}$ fournissent autant de références de fréquence que l'on veut (il suffit de choisir N_0). Cette fréquence de référence ν_0 est fixe et doit être définie avec une excellente précision. On choisit une cavité linéaire (fig. 1-a) et on apporte une attention toute particulière à sa construction, pour éviter les vibrations, la dilatation thermique de la cavité et les fluctuations de pression [13]. Les deux miroirs (dont l'un au moins est semi-réfléchissant) sont au moins de même qualité que ceux de la cavité laser, de sorte que la finesse de la cavité de référence est supérieure ou égale à celle de la cavité laser.
• Ensuite il faut comparer la fréquence ν du laser à la fréquence de référence ν_0. On utilise là une méthode interférométrique, illustrée par la figure (4). Elle consiste à envoyer une partie du faisceau de sortie du laser dans la cavité de référence. Si on prend au préalable la précaution de pouvoir balayer "lentement" la fréquence ν du laser (on verra plus loin comment), de sorte qu'elle varie linéairement au cours du temps (soit $\nu(t) = \nu_d + a\,t$ avec $a > 0$ et $\nu_d < \nu_0$), en mesurant l'intensité de la lumière transmise par la cavité de référence, on obtient la courbe de transmission de cette cavité, avec un maximum de transmission pour $\nu = \nu_0$, puis un autre maximum à la fréquence du mode d'ordre $N_0 + 1$ de la cavité de référence (voir le signal obtenu en transmission dans l'encadré de droite de la figure). Ce signal représentant le rapport $\dfrac{I_{\mathrm{transmise}}}{I_{\mathrm{incidente}}}$ sera désigné par $\theta = \theta(\nu - \nu_0)$ dans la suite. On a ainsi le moyen de comparer précisément ν à ν_0.
Pour obtenir une meilleure précision sur la position des extrémums d'une courbe, il est souvent préférable de déterminer la position des zéros de sa dérivée : c'est ce qui est fait ici en ajoutant à $\nu_d + a\,t$ un terme $\delta\nu_m \cos(2\pi\, f_m\, t)$ où $\delta\nu_{\mathrm{m}}$ est l'amplitude de la modulation et f_m la fréquence de la modulation [14]. Pour dériver effectivement la fonction $\theta(\nu - \nu_0)$, l'amplitude de cette modulation doit être faible devant la largeur du pic de la résonance de la courbe $\theta(\nu - \nu_0)$, largeur qui est dominée

12. En se plaçant dans le même cadre d'approximations que dans la partie 1-1.

13. En général, cette cavité est construite dans un matériau (céramique) à très faible coefficient de dilatation thermique, sa température est régulée avec une grande précision ($\sim$ 0,01 °C) et elle est placée sous vide.

14. Elle est notée f_m parce qu'elle a vocation à être d'origine électronique, et donc à être très faible devant les fréquences optiques, notées ν.

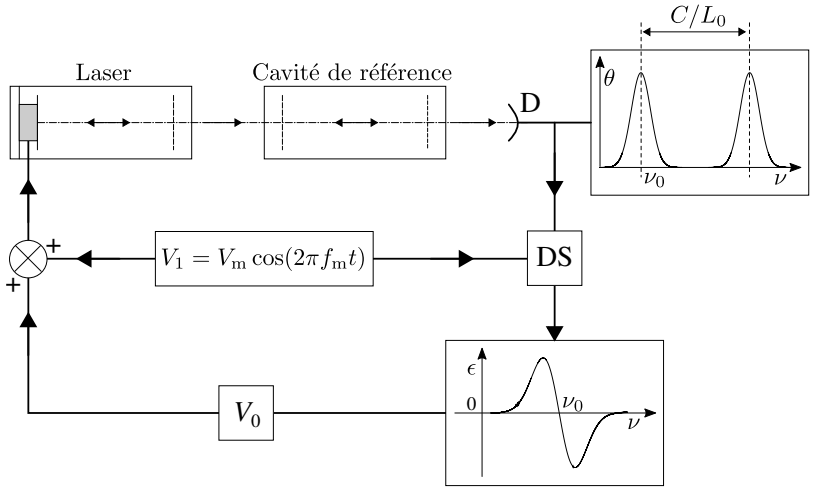


FIGURE 4 – Principe de l'asservissement en fréquence d'un laser monomode. Une partie du faisceau de sortie du laser est envoyé dans une cavité de référence, de longueur développée L_0. La lumière transmise par la cavité de référence est détectée par une photodiode D, qui produit le signal présenté dans l'encart de droite. Si on module la fréquence du laser à la fréquence f_m, la détection synchrone DS permet de détecter la composante modulée du signal de la photodiode D, dont l'amplitude est représentée en fonction de la fréquence du laser dans l'encart relié à DS.

par la largeur spectrale du laser. En détectant par la détection synchrone la composante à la fréquence f_m de l'intensité [15] de la lumière transmise, on obtient un signal proportionnel à $\dfrac{\mathrm{d}\theta(\nu-\nu_0)}{\mathrm{d}\nu}$. Ce signal, qui s'annule en particulier en $\nu = \nu_0$, est adapté pour servir de signal d'erreur $\epsilon(\nu-\nu_0)$ dans l'asservissement de la fréquence du laser monomode. On adopte : $\epsilon(\nu-\nu_0) = \dfrac{\mathrm{d}\theta(\nu-\nu_0)}{\mathrm{d}\nu}$.

• Reste à savoir comment utiliser ce signal d'erreur. Certes, la fréquence centrale du laser monomode, mais non asservi, est directement reliée à la longueur développée L de la cavité constituant le laser : cette fréquence ν est très proche de la fréquence $\nu_N = N\frac{c}{L}$ du mode N de la cavité dans lequel le laser monomode fonctionne. Pour faire varier L, la méthode la plus simple consiste à déplacer un des miroirs de la cavité avec une cale piézoélectrique d'une quantité proportionnelle à la différence de potentiel qui lui est appliquée.

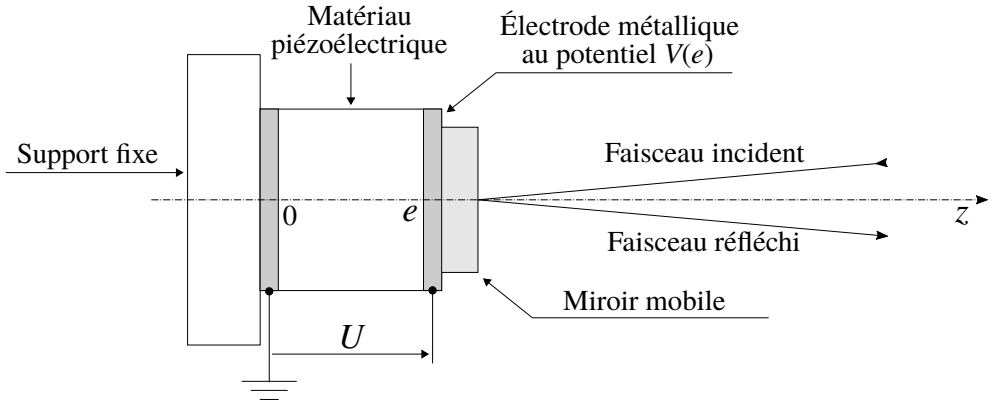


FIGURE 5 – Montage d'un miroir sur une cale piézoélectrique : la cale est constituée d'un matériau piézoélectrique d'épaisseur e placé entre deux électrodes métalliques situées respectivement en $z = 0$ et en $z = e$, et portées aux potentiels électriques $V(0)$ et $V(e)$. La tension appliquée sur le matériau piézoélectrique est définie par $U = V(e) - V(0)$. Le matériau piézoélectrique a la propriété d'être sensible au champ électrique et son épaisseur e varie en fonction de la tension U appliquée.

15. Mesurée par un circuit de détection à photodiode de bande passante supérieure à la fréquence de modulation.

24. La figure (5) détaille le montage d'un miroir M' de la cavité laser sur une cale piézoélectrique.
24-a) Quelle est la valeur de l'amplitude de déplacement du miroir mobile M' nécessaire pour balayer un intervalle spectral libre ν_{ISL} de la cavité laser ?
On supposera que le faisceau intra-cavité réfléchi par ce miroir est à incidence normale au miroir.
24-b) Nous supposerons que l'épaisseur e de l'échantillon piézoélectrique décroît lorsqu'on augmente la tension appliquée U telle qu'elle est définie dans la légende de la figure (5).
La correction δU_ϵ apportée à la tension U par le signal d'erreur ϵ est : $\delta U_\epsilon = K\epsilon(\nu - \nu_0)$.
En utilisant la figure (4), déterminer le signe de la constante K pour assurer le bon fonctionnement de l'asservissement de ν à la valeur ν_0. En déduire l'expression de δU_ϵ.

• On notera qu'en choisissant de transmettre directement le signal d'erreur à la cale piézolectrique, on s'est privé de toute correction dynamique à ce signal d'erreur. Le montage décrit par la figure 4 est utile pour comprendre la nature du signal d'erreur statique transmis au système, mais il ne permet évidemment pas de conclure quant au choix du correcteur.

• Il apparaît dans ce qui précède que l'asservissement en fréquence d'un laser monomode relève par essence de l'analyse fréquentielle des signaux, et que la variable privilégiée est non pas la variable p de Laplace, mais la différence de fréquences $\nu - \nu_0$ qui correspond à la pulsation $\Omega = 2\pi(\nu - \nu_0)$ (soit $p = j\Omega$).
On sait que les composantes basses fréquences [16] du bruit de fréquence jouent un rôle déterminant dans la largeur des raies laser.
Nous allons maintenant asservir le laser sur un signal de même fréquence (donc $\nu \simeq \nu_0$), pour rechercher l'effet de l'asservissement sur le bruit en fréquence du laser. Pour rendre compte du bruit de fréquence, nous le simulons par une perturbation harmonique à la pulsation $\omega_N + \Omega$, Et par conséquent, nous traitons tout le système asservi en analyse harmonique. En première approximation, on peut assimiler cette perturbation à un bruit à la pulsation Ω. La composante harmonique du signal $Q(j\Omega)$ peut représenter une composante du bruit en fréquence du laser monomode non asservi ou un bruit créé par un évènement exceptionnel. Nous insérons ce bruit entre le correcteur et le système (voir fig. (6)).

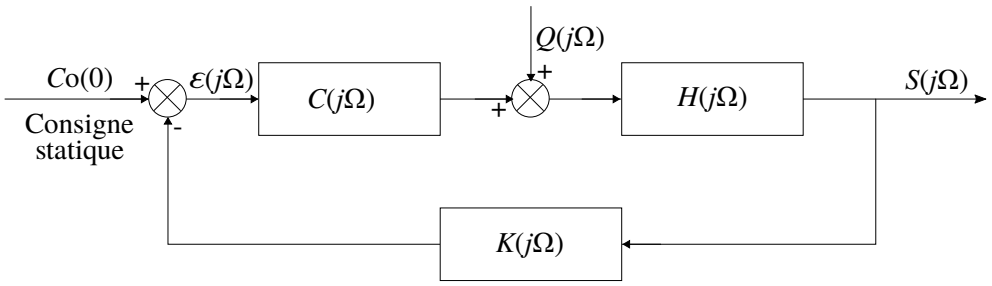


FIGURE 6 – Perturbation harmonique dans un système asservi.

25. Dans ce contexte, le signal d'entrée du système devient maintenant $Q(j\Omega)$, et le signal de sortie reste $S(j\Omega)$.
Déterminer les fonctions de transfert en boucle ouverte $F_O(j\Omega)$ et en boucle fermée $F(j\Omega)$ de ce modèle.
Comment choisir le gain de la fonction de transfert de la boucle de retour pour amortir suffisamment une perturbation à la pulsation Ω.

26. Quand on régule la fréquence d'un laser monomode sur une fréquence de référence ν_0 très stable, on souhaite d'abord que le système asservi ait une excellente précision. Le second critère est évidemment que l'asservissement soit stable.
Quel(s) correcteur(s) proposez vous d'utiliser dans ce cas ? Vous pouvez mentionner plusieurs types de correcteurs en comparant leurs mérites au regard des exigences formulées ci-dessus.

16. Ces composantes de bruit sont principalement dues à des bruits d'origine thermique (très basse fréquence) ou mécanique (vibrations) à plus haute fréquence (jusqu'à 1 MHz dans certains lasers).

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Modèle scalaire des ondes lumineuses
- Propagation d'un signal
- Modélisation des systèmes asservis : structure, SLCI, transformée de Laplace, schéma-blocs
- Équations différentielles linéaires du premier ordre
- Performances des systèmes asservis : stabilité, précision, rapidité
- Correction des systèmes asservis : correcteurs P, PI et à avance de phase
- Simplification d'un modèle : linéarisation, non-linéarités, pôles dominants, validité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/x-ens/mp