Concours d'admission de l'École polytechnique et des ENS (X-ENS), France

Session 2025, filière MP

Physique

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie 1 : le piège électrique
- Partie 2 : quelques perturbations externes
- Partie 3 : la rotation de la particule
- Partie 4 : une analogie mécanique

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/x-ens/mp/2025/physique

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ECOLE POLYTECHNIQUE

ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2025

MERCREDI 16 AVRIL 2025
08h00 - 12h00

FILIERE MP - Epreuve n° 5

PHYSIQUE (XULSR)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Le sujet comprend 8 pages, numérotées de 1 à 8. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Les résultats numériques peuvent être donnés avec un seul chiffre significatif.

La lévitation électrique

Certains objets peuvent être maintenus en lévitation à l'aide de forces électriques, optiques, magnétiques ou acoustiques. Stabiliser la lévitation de particules de taille micrométrique représente aujourd'hui un enjeu crucial en physique fondamentale, ainsi que pour le développement de capteurs de forces ultra-précis.

Dans cette étude, nous cherchons à identifier les régimes dans lesquels la lévitation électrique est stable, c'est-à-dire où la particule reste à la même position moyenne au cours du temps. Dans ce but, il est essentiel que l'oscillateur harmonique, qui décrit le mouvement de la particule, soit suffisamment rigide pour résister aux perturbations, qu'elles soient intrinsèques (comme les asymétries des pièges) ou environnementales (par exemple, les collisions avec des particules de gaz ou le chauffage provoqué par le laser d'imagerie). Les particules étudiées possèdent des électrons fixés à leur surface par des liaisons chimiques. Nous supposons, pour l'ensemble de cette étude, que ces charges restent immobiles à la surface des particules.

La dernière partie (concernant l'analogie mécanique) peut être abordée de manière indépendante du reste de l'étude.

Données, notations et formulaire

La particule à piéger est une particule en diamant, de masse volumique $\rho_m = 3{,}5 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, parfaitement sphérique, de centre C, de diamètre $d = 100\,\mathrm{nm}$ et de masse $m = 2 \times 10^{-18}\,\mathrm{kg}$. Cette particule est chargée négativement sur sa surface. Dans les parties 1 et 2, elle est supposée ne porter qu'une seule charge électronique, $q = -e$.

Pour les applications numériques, on adoptera les valeurs suivantes :

- La constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}4 \times 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$
- La charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
- La vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3{,}0 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
- L'accélération de la pesanteur : $g = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$
- La masse du proton : $m_\mathrm{p} = 1{,}7 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
- La masse de l'électron : $m_\mathrm{e} = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

Les dérivées temporelles première et seconde d'une grandeur $X(t)$ dépendant du temps seront notées respectivement $\dot{X}$ et $\ddot{X}$.

On rappelle l'expression du moment d'inertie I d'une particule sphérique homogène, de diamètre d et de masse m, par rapport à un axe passant par son centre :

$$I = \frac{2}{5} m \left(\frac{d}{2}\right)^2 .$$

Enfin, on rappelle la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}$$

1 Le piège électrique

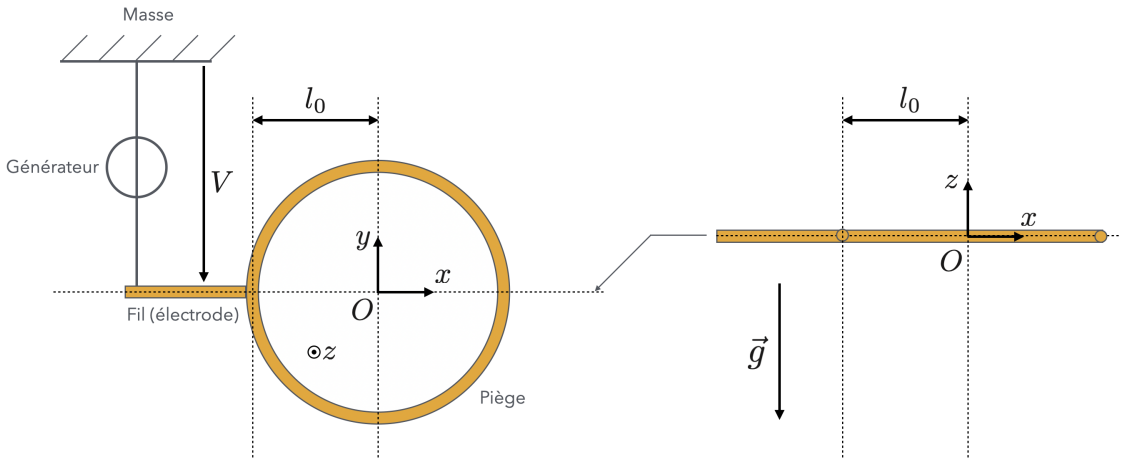


Figure 1: Schéma d'un piège électrique en anneau. Un générateur délivrant une tension V est connecté entre la masse et le fil à gauche du piège. Le schéma de droite est une coupe du piège dans le plan Ozx. L'axe vertical Oz est un axe ascendant.

1. On considère un piège électrique en forme d'anneau tel que celui montré à la Fig 1, placé dans le vide. On se donne un repère $Oxyz$ tel que O est au centre du piège et Oz est l'axe de symétrie de révolution de l'anneau. On note $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ les vecteurs unitaires de ce repère. On note par ailleurs l_0 le rayon de l'anneau, en ignorant son épaisseur, exagérée sur la figure.

   À une position $\vec{r}$ de coordonnées (x, y, z) proche du centre du piège, où x, y et z sont donc tous très petits devant l_0, le potentiel électrique $V_{\text{el}}(\vec{r})$, dans le vide, prend la forme

   $$V_{\text{el}}(\vec{r}) = \frac{\eta V}{l_0^2}(z^2 + \alpha x^2 + \beta y^2), \tag{1}$$

   où V est la tension appliquée entre le piège et la masse (supposée à une distance de celui-ci grande devant l_0), et $\eta > 0$ est un facteur sans dimension qui dépend de la géométrie du piège. On suppose jusqu'à la question 9 incluse que le fil (à gauche du piège) où se connecte le générateur perturbe peu le potentiel au centre du piège et qu'il y a invariance parfaite du potentiel par rotation autour de Oz.

   Déterminer les coefficients α et β.

2. On place maintenant une particule supposée ponctuelle, de charge $q = -e$, au centre du piège. Pourquoi ne peut-elle pas y léviter de manière stable ?

3. Pour résoudre ce problème, on impose une tension variable au cours du temps, de sorte que la particule est maintenant soumise au potentiel dépendant du temps

   $$V_{\text{el}}(\vec{r}, t) = \frac{\eta V(t)}{l_0^2}(z^2 + \alpha x^2 + \beta y^2),$$

où $V(t) = V_0 \cos(\Omega t)$. Écrire l'équation du mouvement pour les trois composantes du vecteur position $\vec{r}$ de la particule dans le repère $Oxyz$, soit $r_i = (r_x, r_y, r_z) = (x, y, z)$, sous la forme

$$\ddot{r}_i + q_i \cos(\Omega t) \frac{\Omega^2}{2} r_i = 0, \tag{2}$$

en faisant apparaître 3 paramètres (q_x, q_y, q_z) que l'on écrira $q_i = n_i(\omega/\Omega)^2$, où $n_i \in \mathbb{Z}$ est une constante numérique et $\omega^2 = e\eta V_0/(ml_0^2)$. On indiquera les valeurs de n_x, n_y et n_z.

4. On suppose que $\Omega \gg \omega$. On admet que la variable $r_i(t)$ peut alors s'exprimer comme une somme de deux variables, $r_i(t) = R_i(t) + \xi_i(t)$, où $R_i(t)$ varie sur une échelle de temps beaucoup plus grande que Ω^{-1} et $\xi_i(t)$ est un signal périodique de pulsation Ω tel que $\xi_i(t)$ et ses dérivées sont de moyenne nulle sur une période d'oscillation du potentiel. Montrer, en justifiant soigneusement chaque étape du raisonnement, que

$$\langle \ddot{R}_i \rangle + q_i \frac{\Omega^2}{2} \langle \xi_i(t) \cos(\Omega t) \rangle = 0, \tag{3}$$

où $\langle \cdot \rangle$ représente une moyenne sur une période d'oscillation, définie par

$$\langle X \rangle = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} X(t) \mathrm{d}t \tag{4}$$

pour une grandeur $X(t)$ quelconque dépendant du temps.

5. Dans cette question, on néglige toutes les harmoniques de pulsation supérieure ou égale à 2Ω.

   a - Quelle est la forme la plus générale de $\xi_i(t)$ respectant les conditions spécifiées ?
   b - Exprimer $\ddot{\xi}_i(t)$ en fonction de Ω, q_i et $R_i(t)$, puis en déduire l'expression de $\xi_i(t)$ en fonction des mêmes grandeurs. On justifiera soigneusement le raisonnement.
   c - Dans le régime $\Omega \gg \omega$, que peut-on dire de ξ_i par rapport à R_i ?

6. Montrer que la variable lente $R_i(t)$ a une dynamique qui se réduit à celle associée à un potentiel harmonique effectif

$$U_{\text{eff}}(R_i) = \frac{1}{2} m \omega_i^2 R_i^2$$

qui ne dépend pas du temps et dont on donnera la fréquence propre ω_i. Comparer ω_i à Ω.

7. Puisque le potentiel électrique donné à la question 3 est de moyenne temporelle nulle, on aurait pu s'attendre à ce qu'il n'y ait pas de force de rappel. Expliquer, avec des dessins montrant la dépendance temporelle et spatiale de la composante $F_z(\vec{r}, t)$ de la force électrique selon la direction z, dans le régime $q_z \ll 1$, pourquoi la particule subit bien, en moyenne sur une période $2\pi/\Omega$, une force de rappel. On distinguera deux cas avec deux positions initiales $z_0 > 0$ et $z_0 < 0$. Pour fixer les idées, on prendra $V_0 < 0$, sachant que le même raisonnement s'appliquerait pour $V_0 > 0$.

8. Pourquoi faut-il que q_i ne soit pas trop petit pour satisfaire aux critères d'une lévitation stable définie dans l'énoncé ?

9. On suppose que $|q_z| \in [0{,}1 - 0{,}3]$ permet d'obtenir un bon confinement dans la direction z, dans un piège où $l_0 = 100\ \mu$m, $\eta = 0{,}1$, et $\Omega = (2\pi)1$ kHz [1]. La particule a toujours un électron à sa surface. Pour quelle gamme de tension électrique V_0 obtient-on un bon confinement dans cette direction ?

10. On souhaite prendre en compte le fil qui permet de connecter le piège au générateur de tension (voir Fig. 1) dans le modèle. L'influence de ce fil peut être modélisée par l'ajout au potentiel d'un terme supplémentaire, anharmonique, de la forme

$$V_a(\vec{r}, t) = \frac{\eta V(t)}{l_1^3} \left(\frac{b_x}{3} x^2 + b_y y^2 + b_z z^2 \right) x \tag{5}$$

où l_1 est une longueur dont on ne précise pas la signification ici. En quoi ce potentiel respecte-t-il la symétrie du piège incluant le fil ?

11. La présence du fil, et donc du terme anharmonique, modifie également l'expression de la partie harmonique du potentiel de l'Eq.(1), c'est-à-dire que les valeurs des coefficients ne sont plus nécessairement celles trouvées alors. On écrit donc cette partie harmonique sous la forme plus générale :

$$V_{\text{el}} = \frac{\eta V(t)}{l_0^2} (a_z z^2 + a_x x^2 + a_y y^2)$$

Quelles sont les deux équations que doivent vérifier les coefficients (a_x, a_y, a_z) et (b_x, b_y, b_z) ?

2 Quelques perturbations externes

12. Le mouvement de la particule peut être traité comme celui d'un oscillateur harmonique à l'équilibre avec le gaz environnant à une température $T = 300\,\text{K}$. Quel est l'écart-type de l'amplitude du mouvement dans la direction x dans le cas où $q_x = 0{,}2$ et $\Omega = (2\pi)1\,\text{kHz}$?

13. Est-il alors possible de confiner cette particule dans un piège avec $l_0 \approx 100\,\mu$m?

14. On n'a considéré jusqu'à présent qu'une particule portant une unique charge élémentaire. On admettra que notre approche est valable pour une particule portant une charge q plus importante en valeur absolue, et que la pulsation ω_z est proportionnelle à cette charge. On prend alors une particule avec une charge suffisante pour que $\omega_z = (2\pi)1\,\text{kHz}$. Déterminer la position z_0 d'équilibre du centre d'inertie de cette particule dans la direction z, en présence de la gravité terrestre, dont la direction est indiquée sur la Fig. 1.

15. On considère que la particule lévite dans une chambre à vide où règne une pression résiduelle $P = 1\,\text{hPa}$. On peut distinguer deux régimes d'écoulement selon la valeur d'un nombre sans dimension, dit *nombre de Knudsen*, $K_n = l^*/d$, où d est le diamètre de la particule et l^* le libre parcours moyen. Lorsque $K_n < 1$, le régime d'écoulement est dit *continu multiphasique* alors que lorsque $K_n > 1$, l'écoulement est dit *libre*.

[1] Cette notation indique que le membre de droite, hors parenthèses, donne la fréquence du signal, et la totalité du membre de droite donne la pulsation en radian par seconde. Donc ici : $\Omega = (2\pi)1\text{kHz} = 2\pi \times 10^3 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On suppose le gaz parfait monoatomique et on donne le libre parcours moyen

$$l^* = \frac{1}{\sqrt{2}\pi a^2 n} \tag{6}$$

où n est la densité d'atomes du gaz et $a \approx 10^{-10}\,\mathrm{m}$ est une longueur qui caractérise les collisions entre atomes du gaz.

Dans lequel des deux régimes décrits ci-dessus la particule se trouve-t-elle à cette pression ?

16. Calculer la vitesse quadratique moyenne v_{qm} des atomes du gaz, en supposant qu'il n'y a que du diazote dans une enceinte à 300 K.

17. On considère que la particule en lévitation est en diamant, de capacité calorifique massique $c_m = 500\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$. Un laser de puissance $\mathcal{P}_0 = 1\,\mathrm{mW}$ est utilisé pour mesurer la position de la particule. Cette puissance, focalisée sur la particule en lévitation, est modulée dans le temps à la pulsation ω_m, de sorte que $\mathcal{P}_\ell(t) = \mathcal{P}_0[1+\cos(\omega_m t)]$. On considère que 10% de la puissance de ce faisceau est absorbée et transmise à la particule sous forme de chaleur, de sorte que la puissance lumineuse absorbée par la particule est $\mathcal{P}_{\mathrm{abs}}(t) = \mathcal{P}_\ell(t)/10$.

    On cherche à estimer la température $T(t)$ de la particule en fonction du temps.

    Les échanges thermiques entre la particule et l'environnement sont d'une part l'apport d'énergie par le laser et d'autre part une fuite thermique vers le gaz thermostaté.

    Quelle est la quantité d'énergie perdue par unité de temps, notée Φ, en fonction du coefficient de transfert thermique de surface h, des températures T_0 du gaz et T de la surface du diamant, et de la surface S de la particule ?

18. On suppose que la température de la particule est homogène. Écrire l'équation différentielle régissant son évolution temporelle $T(t)$. On posera $\mathcal{P}_{\mathrm{abs},0} = \mathcal{P}_0/10$ et $K = hS$.

19. Résoudre cette équation différentielle en considérant qu'au temps $t = 0$, la température de la particule est T_0. Exprimer la solution comme la somme de trois contributions.

20. Donner l'allure de $T(t)$ sur un graphe.

21. Quel est le temps caractéristique τ de passage du régime transitoire au régime permanent ?

    On fera l'application numérique en prenant $h = 100\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-2}}$ et on rappelle ici que $c_m = 500\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ et que la particule est une sphère de diamètre $d = 100\,\mathrm{nm}$ et de masse $m = 2\times 10^{-18}\,\mathrm{kg}$.

22. Après un temps suffisamment long devant τ, montrer que la mesure de l'amplitude de la variation de $T(t)$ à différentes pulsations ω_m de la modulation du laser permet d'accéder à la valeur de la capacité thermique de la particule, connaissant sa surface S et le coefficient h.

3 La rotation de la particule

On tient maintenant compte du fait que la particule n'est pas ponctuelle et qu'elle peut être sujette à des rotations.

On commence par supposer que ces rotations sont limitées au plan Oxy perpendiculaire à l'axe Oz de symétrie de révolution du piège, en repérant l'orientation de la particule dans ce plan par un angle algébrique ϕ. On suppose, jusqu'à la question 25 incluse, que la particule est suffisamment bien confinée selon Ox, Oy et Oz pour que son centre d'inertie C soit constamment confondu avec l'origine O. On note I le moment d'inertie de la particule par rapport à l'axe Oz, qui est donc dans cette configuration un axe de symétrie de la particule.

23. Les collisions avec le gaz discutées aux questions 15 et 16 donnent lieu à un *couple visqueux* de la forme $-I\gamma\dot{\phi}$. Dans le régime libre introduit à la question 15, on peut montrer que

$$\gamma = \frac{40Pd^2}{3mv_{qm}}$$

où m est la masse de la particule, P la pression dans la chambre à vide et v_{qm} la vitesse quadratique moyenne des atomes du gaz. Que vaut γ pour les valeurs numériques déjà évoquées de ces grandeurs physiques ?

24. On suppose que l'angle ϕ oscille autour d'une position d'équilibre et que son évolution temporelle en l'absence de ce couple visqueux peut être décrite comme celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_\phi = (2\pi)10\,\mathrm{kHz}$. À partir du résultat précédent, calculer le facteur de qualité $\mathcal{Q}$ de cet oscillateur tenant compte du couple visqueux.

25. On met la particule en rotation au moyen d'un laser exerçant un couple $\vec{C}_l = C_l\vec{u}_z$.

    À quelle vitesse angulaire maximale $\omega_{\max} = \dot{\phi}_{\max}$ peut-on faire tourner la particule avec ce couple ? On négligera ici le couple de rappel, on utilisera le résultat de la question 23 et on fera l'application numérique pour un couple de module $C_l = 10^{-19}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$ et en supposant la particule homogène et sphérique. On prendra comme valeurs numériques de m et d celles déjà mentionnées.

26. L'objet des questions suivantes de cette partie (*i.e.* des questions 26 à 31) est d'étudier les régimes dans lesquels la particule est stabilisée angulairement grâce au piège électrique.

    Pour ce faire, on considère désormais que la particule porte deux charges $-e$ fixées à sa surface en deux points P_1 et P_2 diamétralement opposés. Désormais, le centre d'inertie C de la particule n'est plus nécessairement confondu avec O, et on le repère par ses coordonnées x, y, z dans le repère $Oxyz$, comme on repérait la particule ponctuelle dans la première partie. On pose

$$\overrightarrow{CP}_1 = -\overrightarrow{CP}_2 = (\delta x)\,\vec{u}_x + (\delta y)\,\vec{u}_y + (\delta z)\,\vec{u}_z.$$

    Enfin on suppose que la particule n'est soumise à aucune autre force que les forces électriques du piège, et on ignorera les effets d'anharmonicité induits par la présence du fil.
    Montrer que le mouvement du centre de masse de la particule est régi par les mêmes équations que celles de la question 3, à condition de multiplier par deux la charge de la particule.

27. La présence de deux charges électriques à la surface suggère qu'un couple de forces électriques peut exister, influençant la rotation de la particule. Cette rotation n'est *a priori* plus contrainte au seul plan Oxy.

    a - Calculer le moment $\vec{\Gamma}_{O,i}$ de la force électrique exercée par le piège sur la charge $-e$ située en P_i, pour $i \in \{1, 2\}$, par rapport au centre O du piège.

    b- En déduire le moment total des forces électriques par rapport à O, noté $\vec{\Gamma}_O$.

28. Le moment total $\vec{\Gamma}_O$ apparaît comme la somme de deux termes. Lequel est responsable de la rotation instantanée de la particule autour d'un axe passant par C ? On le notera $\vec{\Gamma}_C$. Que décrit l'autre terme ?

29. Nous allons maintenant étudier la rotation de la particule, en se donnant un repère $OXYZ$ défini ainsi :

    - Les axes de ce nouveau repère sont fixés à la particule
    - L'axe OZ pointe à chaque instant dans la direction du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{P_2P_1}/d$.

    Les composantes d'un vecteur quelconque dans le repère $OXYZ$ peuvent être obtenues à partir de celles de ce même vecteur dans $Oxyz$ à l'aide de deux angles ϕ_1 et ϕ_2, variant au cours du temps, et à l'aide de matrices de rotations (que l'on n'explicitera pas ici).

    Nous allons supposer que le vecteur unitaire $\vec{v}$ pointe toujours au voisinage de $\vec{u}_z$. On admettra qu'on peut alors écrire

    $$\vec{v} = \vec{u}_z + \phi_1(t)\vec{u}_x - \phi_2(t)\vec{u}_y.$$

    avec $|\phi_1| \ll 1$ et $|\phi_2| \ll 1$.

    De plus, on admettra que $I\ddot{\phi}_1 = \vec{\Gamma}_C \cdot \vec{u}_y$ et $I\ddot{\phi}_2 = \vec{\Gamma}_C \cdot \vec{u}_x$, où l'on rappelle que I est le moment d'inertie de la particule par rapport à un axe quelconque passant par son centre. Écrire les équations différentielles vérifiées par $\phi_1(t)$ et $\phi_2(t)$. On négligera les frottements avec l'air.

30. Comparer les deux équations différentielles obtenues pour ϕ_1 et ϕ_2 avec celles obtenues pour les variables x, y et z à la question 3. On fera apparaître trois constantes $\{q_{\phi_1}, q_{\phi_2}\}$ et ω_r jouant le même rôle que $\{q_x, q_y, q_z\}$ et ω dans les équations obtenues la question 3.

31. On suppose dans cette question que $\omega \ll \Omega$ et $\omega_r \ll \Omega$.

    a - En déduire que les angles ϕ_1 et ϕ_2 subissent un couple de rappel autour de la valeur nulle sous l'action du piège électrique.

    b - Calculer, pour une même particule avec deux charges $-e$ diamétralement opposées, le rapport entre la fréquence effective du mouvement de son centre de masse dans la direction z (calculée à la question 6, mais pour une particule avec une seule charge) et la fréquence effective associée à son confinement angulaire.

4 Une analogie mécanique

On se propose d'étudier une analogie mécanique du confinement électrique du centre de masse. Une balle (traitée comme un point matériel dans toute cette partie) de masse m, non chargée, peut se déplacer sur une surface courbée, de rayon de courbure $R > 0$ dans la direction x et $-R < 0$ dans la direction y, la direction z correspondant à la verticale. On peut considérer que la balle, placée sur cette surface dans le champ de pesanteur, est soumise au potentiel

$$U(x, y) = \frac{mg}{2R}(x^2 - y^2) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 - y^2)$$

32. On fait tourner la surface autour de l'axe Oz, à la vitesse angulaire constante Ω, par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ du laboratoire, l'origine O étant supposée fixe. Rappeler les forces d'inertie qui apparaissent lors de la description du mouvement d'une particule de vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel tournant $\mathcal{R}$ attaché à la surface en rotation. On notera $\vec{r}$ la position de la balle dans ce référentiel.

33. Écrire les équations du mouvement pour les coordonnées x et y dans le référentiel tournant $\mathcal{R}$. On supposera que le vecteur position de la balle est quasi-orthogonal au vecteur rotation à chaque instant, c'est-à-dire que la courbure est faible.

34. Chercher des solutions de la forme $x(t) = x_0 \exp(rt)$ et $y(t) = y_0 \exp(rt)$ et en discuter la stabilité. Tracer un diagramme de stabilité dans le plan (Ω, ω).

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Équations différentielles linéaires du second ordre
- Calcul infinitésimal du physicien : dérivées et différentielles
- Équations différentielles linéaires du premier ordre
- Régime sinusoïdal forcé
- Grandeurs, unités, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur
- Mécanique du solide et frottement solide
- Référentiels non galiléens

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/x-ens/mp