Concours d'admission de l'École polytechnique et des ENS (X-ENS), France

Session 2026, filière MP

Physique et sciences de l'ingénieur

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie Physique, 1 : communications entre le satellite et la Terre
- Partie Physique, 2.1 et 2.2 : points de Lagrange
- Partie Physique, 2.3 : stabilité des points de Lagrange
- Partie Sciences de l'ingénieur, 1 et 2.1 : présentation du système et analyse du mécanisme
- Partie Sciences de l'ingénieur, 2.2 et 2.3 : dynamique du déploiement et validation des résultats
- Partie Sciences de l'ingénieur, 3 : orientation des panneaux solaires

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/x-ens/mp/2026/physique-si

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ECOLE POLYTECHNIQUE

ESPCI

CONCOURS D'ADMISSION 2026

MARDI 14 AVRIL 2026
14h00 - 18h00

FILIERE MP - Epreuve n° 4

PHYSIQUE ET SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Cette composition ne concerne qu'une partie des candidats de la filière MP, les autres candidats effectuant simultanément la composition d'Informatique A.
Pour la filière MP, il y a donc deux enveloppes de Sujets pour cette séance.

Cette épreuve comprend deux parties indépendantes. La première partie, consacrée à la physique, s'intéresse aux satellites d'étude du Soleil. La seconde, dédiée aux sciences de l'ingénieur, propose d'étudier le déploiement et l'orientation des panneaux solaires d'un tel satellite, en orbite.

➞ *Il est conseillé de ne pas consacrer plus de deux heures par partie.*

➞ *Les applications numériques seront effectuées avec la précision qu'un calcul à la main permet aisément, et sans excéder deux chiffres significatifs. Les ordres de grandeur seront donnés avec un seul chiffre significatif.*

➞ *Les réponses aux questions relevant de considérations qualitatives devront être systématiquement argumentées.*

➞ *Les références des questions abordées devront être indiquées de façon claire.*

Sur les satellites d'étude du Soleil

Partie Physique

Cette année doit être lancé SMILE [1], acronyme de "Solar Wind Magnetosphere Ionosphere Link Explorer". Cette mission fait suite à celles de WIND et de SoHO, satellites lancés en 1993 et 1995, qui ont étudié la couronne solaire, le vent solaire et ses interactions avec la magnétosphère terrestre. Dépassant largement les durées prévues pour leurs missions (soit 3 ans et 2 ans), ces satellites nous font toujours parvenir des données. Avec SMILE, on observera l'interaction du vent solaire avec la magnétosphère et l'ionosphère terrestres et en fin de compte avec la Terre. Les tempêtes et éruptions solaires peuvent en effet gravement endommager les satellites en orbite et les installations électriques au sol. SMILE va ainsi nous aider à mieux comprendre ces interactions entre le vent solaire et nous, et par là même à mieux se protéger de leurs effets.

Le positionnement d'un tel satellite est d'une importance cruciale pour pouvoir collecter des données de manière efficace et continûment pendant des temps longs tout en s'assurant que celui-ci peut rester à la position prévue le plus longtemps possible. C'est pourquoi les deux satellites WIND et SoHO ont été positionnés de manière stratégique au point de Lagrange L_1 pour permettre une meilleure observation du vent solaire.

Ce problème est constitué de deux parties indépendantes. La première s'intéresse aux communications avec le satellite, nécessaires pour contrôler ses systèmes et en récupérer les données. La deuxième vise à montrer l'existence et la stabilité de points spécifiques appelés points de Lagrange et leur intérêt.

Notations et formulaire

Les vecteurs unitaires de la base cartésienne seront notés $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.
Formule du double produit vectoriel : soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, alors :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}$$

1 Communications entre le satellite et la Terre

Pour un satellite d'observation comme SoHO, WIND ou SMILE, la récupération des données enregistrées par le satellite est réalisée de manière continue et directe. Le satellite transmet les données par l'émission d'ondes électromagnétiques dans la bande Ku, bande de fréquences comprise entre 10,7 GHz et 14,5 GHz. Nous allons étudier dans cette partie les problématiques liées à la transmission d'ondes électromagnétiques entre le satellite et la Terre, notamment celles provenant de la propagation de ces ondes dans l'ionosphère.

1. mission conjointe de l'European Space Agency (ESA) et l'Académie Chinoise des Sciences (CAS).

Dans cette partie, nous allons considérer l'ionosphère comme un plasma peu dense, constitué d'électrons libres et d'ions produits par photoionisation UV (ou X) des constituants de l'atmosphère à l'altitude considérée (typiquement comprise entre 60 km et 800 km). Dans cette zone, la densité électronique de l'ionosphère est $n_e \approx 10^{12}$ m^{-3}, et il y a autant d'ions (positifs, de charge $q_i = +e$) que d'électrons, d'où $n_i = n_e$. Selon l'altitude, la nature précise de ces ions moléculaires ou atomiques peut changer et il peut subsister ou non un gaz constitué d'atomes et de molécules neutres.
En outre nous négligerons l'influence du champ magnétique terrestre sur le plasma ionosphèrique.

Constantes physiques utiles pour la partie 1

notation	grandeur	valeur	unité
e	charge élémentaire	$1{,}6 \times 10^{-19}$	C
m_e	masse de l'électron	$9{,}1 \times 10^{-31}$	kg
m_p	masse du proton	$1{,}6 \times 10^{-27}$	kg
ϵ_0	permittivité diélectrique du vide	$8{,}8 \times 10^{-12}$	F $\cdot$ m^{-1}
μ_0	perméabilité magnétique du vide	$\simeq 4\pi \times 10^{-7}$	H $\cdot$ m^{-1}
n_e	densité électronique de l'ionosphère	10^{12}	m^{-3}

1. **a -** Dans ces conditions, établir l'équation du mouvement d'une particule chargée (de charge q et de masse m) du plasma, en présence du champ électromagnétique $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$ de l'onde incidente.
b - Nous supposerons également que toutes les particules chargées sont non relativistes (au sens où leur vitesse v est négligeable devant la vitesse de la lumière dans le vide c).
En déduire une forme simplifiée de l'équation du mouvement précédente, en justifiant cette simplification.

2. On considère maintenant que le champ électromagnétique se propageant dans le plasma est une onde plane progressive harmonique, de pulsation ω, se propageant dans la direction donnée par le vecteur d'onde $\vec{k}$. On pourra la supposer polarisée rectilignement.
a - Justifier que les ions ne contribuent pratiquement pas à la densité de courant.
b - En déduire que

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}} \qquad (\mathbf{1})$$

où $\underline{\vec{E}}$ est le champ électrique complexe défini par $\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\vec{k}\,\cdot\,\vec{r}-\omega t)}$ et $\vec{E}(\vec{r},t) = \mathfrak{Re}(\underline{\vec{E}})$, $\underline{\vec{j}}$ est la densité volumique complexe de courant dans le plasma et $\underline{\sigma}$ la conductivité complexe du plasma.
Préciser l'expression de $\underline{\sigma}$.

3. **a -** Etablir la relation de dispersion dans ce milieu et montrer l'existence d'une pulsation particulière, appelée pulsation plasma et notée ω_p, dont on donnera l'expression.
b - Calculer l'ordre de grandeur de la fréquence plasma f_p, associée à ω_p.
c - Interpréter physiquement ce que représente la fréquence plasma.
d - Indiquer quelles sont les implications de l'existence d'une telle fréquence, en matière de transmission d'ondes électromagnétiques.

4. Exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de la pulsation plasma. Commenter.

5. **a -** Tracer la courbe de dispersion $k = f(\omega)$ pour $k \geq 0$ et identifier sur cette courbe les zones de forte ou de faible dispersion, en expliquant le critère utilisé.
b - Expliquer les effets de la propagation en milieu dispersif sur la transmission des données.
c - Justifier le choix de la bande de fréquences utilisée pour communiquer avec les satellites d'observation du Soleil.

2 Points de Lagrange et stabilité

L'étude du vent solaire requiert de positionner le satellite de manière stratégique dans l'espace. Pour permettre une observation permanente du Soleil et du vent solaire, il faut se placer face au Soleil, en amont de la Terre. De plus, pour que la mission d'étude puisse être viable, il est intéressant de se placer en un point où le besoin d'énergie pour maintenir une position stable est minimal. Il existe un point particulier respectant à priori ces deux critères, c'est le point de Lagrange L_1. Mais le système gravitationnel Soleil-Terre présente d'autres points d'équilibre dont il est intéressant d'étudier la position et la stabilité.

Constantes physiques utiles pour la partie 2

notation	grandeur	valeur	unité
UA	unité astronomique	$1{,}5 \times 10^{11}$	m
G	constante de gravitation	$6{,}7 \times 10^{-11}$	$\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$
M_S	masse du Soleil	$2{,}0 \times 10^{30}$	kg
M_T	masse de la Terre	$6{,}0 \times 10^{24}$	kg
ST	distance Soleil-Terre	1	UA

Notations et formulaire

Gradient en coordonnées cylindriques (en notant $\vec{e}_r$,$\vec{e}_\theta$,$\vec{e}_z$ les vecteurs unitaires de la base cylindrique) :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(V(r,\theta,z)) = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

2.1 Etude préliminaire

Nous considérerons ici le cas d'un satellite P, de masse m, sous l'influence gravitationnelle du Soleil et de la Terre. Ces deux astres sont supposés de symétrie sphérique, de centres respectifs S et T, et de masses M_S et M_T, devant lesquelles m est négligeable. Le système des trois corps S, T et P est supposé isolé dans l'espace.

Considérons alors un système de coordonnées (ξ,η,ζ) appelé système sidéral [2] de coordonnées, centré sur le centre de masse O du Soleil et de la Terre. On choisit l'axe $\vec{e}_\xi$ selon l'orientation du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{ST}} = \vec{R}$ à l'instant $t = 0$, et l'axe $\vec{e}_\eta$ perpendiculaire à l'axe $\vec{e}_\xi$ et contenu dans le plan orbital des deux astres. L'axe $\vec{e}_\zeta$ est alors orienté selon le moment cinétique du système Soleil-Terre, perpendiculairement au plan $(\mathrm{O}\xi\eta)$ (voir figure **1**). Par la suite on notera $\theta = (\vec{e}_\xi,\vec{R})$ l'angle entre l'axe $\vec{e}_\xi$ et le vecteur $\vec{R}$ à l'instant t.

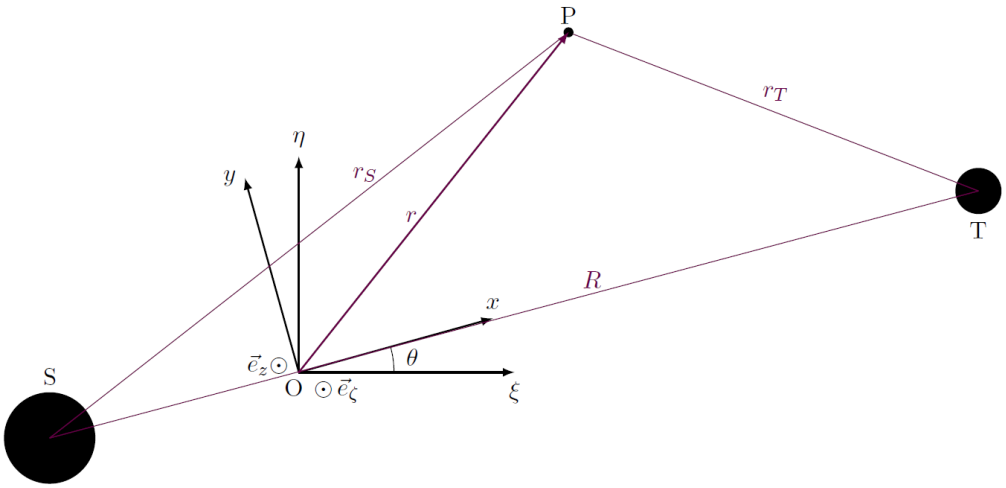


FIGURE **1** – Visualisation à l'instant t du plan contenant les deux astres, le Soleil et la Terre, ainsi que le satellite P et présentation des coordonnées sidérales (η,ξ,ζ) et synodiques (x,y,z). L'origine O est le centre de masse des deux astres.

2. sidéral signifie ici que les axes $\vec{e}_\xi$, $\vec{e}_\eta$, $\vec{e}_\zeta$ sont définis par rapport à des étoiles fixes.

On suppose de plus que les trajectoires du Soleil et de la Terre dans le référentiel $\mathcal{R}_s = (O, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ sont circulaires et donc que la distance ST $= R$ entre le Soleil et la Terre est constante, ce qui entraîne que le vecteur $\vec{R}$ tourne autour de O avec une vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}$ constante, d'où $\theta = \Omega t$. On introduit alors un référentiel $\mathcal{R}_\Omega = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tournant à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{e}_z$, appelé référentiel synodique (voir figure **1**) ; le Soleil et la Terre sont donc fixes dans ce référentiel. On note $\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \vec{R}_T$ et $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \vec{R}_S$.

6. a - Exprimer la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}$ en fonction de G, R et de la masse totale $M = M_S + M_T$ du système Soleil-Terre.

b - Interpréter et proposer une valeur approchée de la période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ dans l'unité la plus adaptée, en évitant tout calcul numérique.

Pour simplifier l'étude suivante, on considérera que la trajectoire du point P se situe dans le même plan que les trajectoires de S et T (c'est-à-dire dans le plan de l'écliptique). On utilisera les notations suivantes : $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$, $\overrightarrow{\mathrm{SP}} = \vec{r}_S$, $\overrightarrow{\mathrm{TP}} = \vec{r}_T$ (voir figure **1**).
Dans la suite de cette partie, nous allons utiliser des concepts introduits par les mathématiciens et mécaniciens du 18ème siècle (par exemple Euler ou Lagrange) et de la première moitié du 19ème siècle (Jacobi). Vous devrez donc réinterpréter dans le cadre de la mécanique que vous avez étudiée au 21ème siècle certaines des grandeurs introduites dans les deux questions suivantes.

7. a - Montrer que l'on peut trouver une fonction $U(\mathrm{P})$ de la position du point P, telle que

$$\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \ddot{y} + 2\Omega\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{2}$$

La fonction $U(\mathrm{P})$ a été appelée pseudo-potentiel.

b - Exprimer $U(\mathrm{P})$ en fonction de r, r_S et r_T, et donner une interprétation physique de la fonction $U(\mathrm{P})$.

8. a - Déduire des équations précédentes l'existence d'une constante du mouvement C_J appelée constante de Jacobi, telle que :

$$C_J = 2U - v^2 \tag{3}$$

où $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$ représente la vitesse de la particule P dans le référentiel tournant $\mathcal{R}_\Omega$ et v représente la norme de cette vitesse.
Et proposer une interprétation physique de la constante de Jacobi.

b - On définit les zones d'exclusion du mouvement comme étant les zones de l'espace où la particule P ne peut pas pénétrer. Expliquer comment cette constante fournit les zones d'exclusion du mouvement pour la particule P.

2.2 Détermination des positions des points de Lagrange

Le problème à deux corps en interaction gravitationnelle se prête bien à l'introduction de grandeurs adimensionnées. Pour ce faire, nous allons choisir une unité de masse u_M, une unité de longueur u_L et une unité de temps u_t définies par

$$u_M = M = M_S + M_T; \quad u_L = R = ||\overrightarrow{\mathrm{ST}}||; \quad u_t = \frac{T}{2\pi}$$

Nous allons nous servir de ces unités pour définir les grandeurs adimensionnées suivantes :

$$\mu_i = \frac{M_i}{u_M} \quad \forall i \in (\mathrm{S,T}); \quad \rho = \frac{r}{u_L}; \quad \tau = \frac{t}{u_t}$$

9. a - Montrer que dans ce système d'unités, la vitesse angulaire adimensionnée $\omega = \frac{\Omega}{u_\Omega}$ et la constante de gravitation adimensionnée Γ sont toutes les deux égales à 1.

b - Montrer également que le temps adimensionné τ est égal à l'angle $\theta = (\vec{e}_\xi, \vec{e}_x)$. On pourra utiliser les résultats de la question **6** si nécessaire.

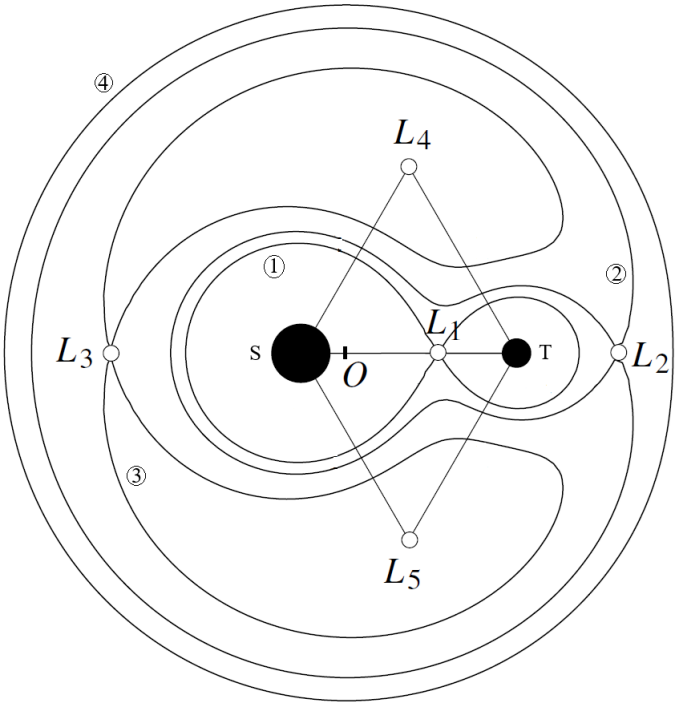


FIGURE **2** – Localisation des points de Lagrange pour $\mu_T = 0{,}2$. Le tracé montre différentes courbes de niveau de la fonction $\tilde{U}(\tilde{x},\tilde{y})$. La courbe ① correspond à $\tilde{U}_1 = 1{,}903 = \tilde{U}(\mathrm{L}_1)$, la courbe ② correspond à $\tilde{U}_2 = 1{,}776 = \tilde{U}(\mathrm{L}_2)$, la courbe ③ correspond à $\tilde{U}_3 = 1{,}598 = \tilde{U}(\mathrm{L}_3)$, la courbe ④ correspond de nouveau à $\tilde{U}_4 = 1{,}903 = \tilde{U}(\mathrm{L}_1)$. Les deux points de Lagrange L_4 et L_5 correspondent à $\tilde{U}(\mathrm{L}_4) = \tilde{U}(\mathrm{L}_5) = 1{,}420$, qui est la valeur minimale de la fonction $\tilde{U}$ dans le plan $(\tilde{x},\tilde{y})$.

Il existe au voisinage de l'orbite de la Terre autour du Soleil des points particuliers où un objet de masse négligeable, par exemple un satellite, situé en ces points n'est soumis à aucune force dans le référentiel tournant $\mathcal{R}_\Omega$ (où S et T sont immobiles), et par conséquent tourne autour du point O avec la même vitesse angulaire que la Terre. Ces points, appelés points de Lagrange, sont au nombre de cinq ; ils sont désignés par L_i où $i \in [\![1,5]\!]$. La disposition de ces points est présentée sur la figure **2**.
Dans la suite de ce problème, nous allons étudier l'existence et la stabilité de ces points. En introduisant les grandeurs adimensionnées $\rho_S = \frac{r_S}{R}$ et $\rho_T = \frac{r_T}{R}$, le potentiel adimensionné devient

$$\tilde{U} = \frac{U}{u_U} = \mu_S \left(\frac{1}{\rho_S} + \frac{\rho_S^2}{2} \right) + \mu_T \left(\frac{1}{\rho_T} + \frac{\rho_T^2}{2} \right) - \frac{1}{2}\,\mu_S\,\mu_T \qquad (\mathbf{4})$$

Dans la suite, on introduira les grandeurs adimensionnées $\tilde{x} = \dfrac{x}{R}$ et $\tilde{y} = \dfrac{y}{R}$

10. Déterminer la position des deux points d'équilibre notés L_4 et L_5 qui ne sont pas situés sur l'axe $(\mathrm{O}x)$ de symétrie de la figure **2** ; on donnera les valeurs de (ρ_S,ρ_T) et de $(\tilde{x},\tilde{y})$ pour chacun de ces points.
Tant pour cette question que pour la suivante, on portera une attention toute particulière sur le fait que les grandeurs ρ_S et ρ_T dépendent des variables $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$.

11. On se propose maintenant de déterminer la position du point L_1. Comme le montre la figure **2**, ce point d'équilibre est situé sur l'axe $(\mathrm{O}x)$, entre le Soleil et la Terre.
Déduire de cette information deux relations entre ρ_S et $\tilde{x}_1 = \tilde{x}(\mathrm{L}_1)$ d'une part, et entre ρ_T et $\tilde{x}_1 = \tilde{x}(\mathrm{L}_1)$ d'autre part, puis s'en servir pour montrer que le point L_1 vérifie l'équation suivante :

$$\mathrm{L}_1 : \quad \frac{\mu_T}{3\mu_S} = \rho_T^3 \frac{1 - \rho_T + \frac{\rho_T^2}{3}}{(1-\rho_T)^2(1-\rho_T^3)} \qquad (\mathbf{5})$$

12. **a -** Calculer la valeur numérique de $\alpha = \frac{\mu_T}{3\mu_S}$, puis en déduire une valeur approchée de ρ_T (on pourra se limiter au terme d'ordre le plus bas dans le développement limité de l'équation (**5**)).
b - En déduire la valeur numérique de la distance r_T du point L_1 à la Terre.

2.3 Etude de la stabilité des points de Lagrange

La figure **2** présente plusieurs courbes de niveau de la fonction $\tilde{U}(\tilde{x},\tilde{y})$. La courbe numérotée k est définie par l'équation implicite $\tilde{U}(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{U}_k$, et les valeurs de $\tilde{U}_k$ sont indiquées dans la légende de la figure **2**, de même que les valeurs de $\tilde{U}(\mathrm{L}_4)$ et de $\tilde{U}(\mathrm{L}_5)$ qui sont la valeur minimale de la fonction $\tilde{U}(\tilde{x},\tilde{y})$ dans le plan $(\mathrm{O}xy)$. On notera que les courbes de niveau numérotées 1, 2 et 3 passent respectivement par L_1, L_2 et L_3.

13. Expliquer de manière qualitative pourquoi les points L_1, L_2 et L_3 ne peuvent pas être stables.

En réalité, la résultante des forces agissant sur P dans le référentiel tournant $\mathcal{R}_\Omega$ (soit la somme des forces de gravitation dues au Soleil et à la Terre et de la force d'inertie d'entraînement due à la rotation du référentiel $\mathcal{R}_\Omega$ à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$) dérive d'une énergie potentielle $E_p(x,y) = -m\,U(x,y)$. Ainsi le minimum de U observé en L_4 (ou L_5) devient un maximum de $E_p(x,y)$. Et dans un référentiel galiléen, on ne considère pas à priori un maximum d'énergie potentielle comme un point d'équilibre stable. Mais $\mathcal{R}_\Omega$ n'est pas un référentiel galiléen.

14. Justifier qualitativement le fait que la force d'inertie de Coriolis puisse conduire à stabiliser P au voisinage du point L_4. On parle alors de stabilité dynamique de L_4 et de L_5.

Pour caractériser quantitativement la stabilité du point de Lagrange L_i, nous allons étudier le mouvement de la particule-test P au voisinage du point L_i considéré. Les coordonnées adimensionnées de P sont alors $\tilde{x} = x_0 + X$ et $\tilde{y} = y_0 + Y$, en notant $(x_0,y_0) = (\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)$ les coordonnées adimensionnées de L_i. On développera le pseudo-potentiel $\tilde{U}(\tilde{x},\tilde{y})$ à l'ordre 2 en X et Y au voisinage du point L_i. Pour cela, on utilisera les notations suivantes :

$$\tilde{U}(x_0,y_0) = U_0 \; ; \quad U_{xx} = \frac{\partial^2\tilde{U}}{\partial\tilde{x}^2}(x_0,y_0) \; ; \quad U_{xy} = \frac{\partial^2\tilde{U}}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{y}}(x_0,y_0) \; ; \quad U_{yy} = \frac{\partial^2\tilde{U}}{\partial\tilde{y}^2}(x_0,y_0) \qquad (\mathbf{6})$$

Les équations du mouvement (**2**) du point P conduisent aux relations entre grandeurs adimensionnées

$$X'' = 2Y' + \frac{\partial\tilde{U}}{\partial X} \; ; \quad Y'' = -2X' + \frac{\partial\tilde{U}}{\partial Y} \qquad (\mathbf{7})$$

où $X' = \dfrac{dX}{d\tau}$ et $X'' = \dfrac{d^2X}{d\tau^2}$.

15. Ecrire ces équations du mouvement (**7**) sous la forme du système matriciel

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ X'' \\ Y'' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ X' \\ Y' \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{8})$$

et exprimer la matrice **A** avec les notations (**6**) introduites ci-dessus.

On admettra que les solutions du système matriciel peuvent se mettre sous la forme

$$X = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k \mathrm{e}^{\lambda_k t} \; ; \quad Y = \sum_{k=1}^{4} \beta_k \mathrm{e}^{\lambda_k t} \qquad (\mathbf{9})$$

où les λ_k ($k \in [\![1,4]\!]$) sont les valeurs propres de la matrice **A**. Pour les points de Lagrange L_4 et L_5, ces valeurs propres sont solutions de l'équation

$$L_4,L_5 : \quad \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu_T(1-\mu_T) = 0 \qquad (\mathbf{10})$$

16. a - Donner une condition sur μ_T pour que les points L_4 et L_5 soient dynamiquement stables.
b - Estimer la valeur de μ_T et conclure sur la stabilité dynamique des points L_4 et L_5 pour le système Soleil-Terre.

17. Montrer que le mouvement par rapport à $\mathcal{R}_\Omega$ d'un objet dynamiquement stable au voisinage de L_4 (ou L_5) est caractérisé par deux périodes d'évolution différentes T_1 et T_2 (où $T_2 > T_1$) et calculer les valeurs numériques de ces deux périodes (dans l'unité la plus appropriée).

Nous pouvons déduire de cette étude que les seuls points réellement stables sont les points L_4 et L_5. Les positions des points de Lagrange se déplacent en fonction de la force de traînée due au rayonnement solaire qui s'exerce sur les objets présents en ces points. Il faut noter que des troyens terrestres ont récemment été découverts aux points L_4 et L_5 du système Soleil-Terre. L'étude de ces objets est intéressante pour connaître la composition du système solaire à sa formation.

Le point L_1 est à priori instable, mais il a été prouvé que l'on peut choisir des conditions initiales particulières, méthode utilisée par le satellite SOHO, pour être sur une orbite particulièrement stable permettant d'utiliser un minimum de carburant pour rester en place.

Partie Sciences de l'Ingénieur

Déploiement et orientation des panneaux solaires du satellite

1 Présentation du système de panneaux solaires

Nous nous intéressons désormais au déploiement du satellite SMILE et en particulier à son alimentation en énergie. Le satellite est équipé de deux systèmes de panneaux solaires permettant de recharger des batteries embarquées pour alimenter les différents appareils de mesure et de communication (Figure **3**). Ces systèmes sont chacun composés d'un bras portant et de 3 panneaux liés entre eux par des charnières équipées d'un système de blocage. Ainsi le satellite est embarqué avec les panneaux repliés, puis des ressorts de torsion à l'intérieur des charnières permettent la rotation des panneaux qui sont ensuite bloqués dans leur position déployée.

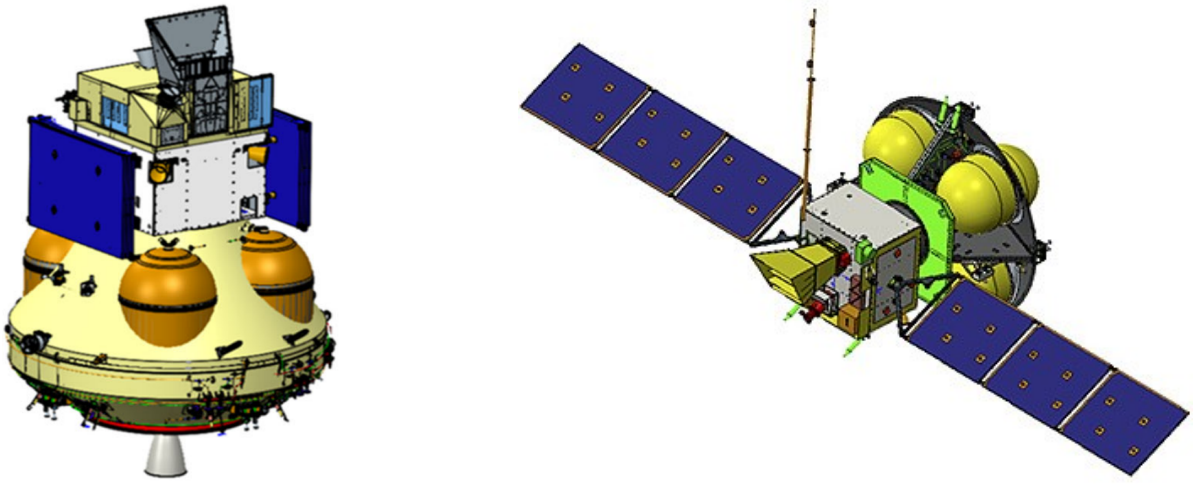


FIGURE **3** – Représentation du satellite SMILE avec son module de propulsion et ses panneaux solaires, repliés à gauche et déployés à droite.

L'étude proposée se concentre sur un système de panneaux solaires, représenté figure **4** et composé du satellite 0, de l'arbre 1, du bras 2 et des panneaux 3, 4 et 5. L'arbre 1, en liaison pivot d'axe $(O_1,\overrightarrow{x_1})$ par rapport au satellite, permet d'orienter les panneaux par rapport au Soleil. Une charnière placée en O_2, dite principale, permet de déployer le bras 2 par rapport à l'arbre 1 puis de le verrouiller. Nous considérerons par la suite cette charnière comme réalisant une liaison pivot autour de $\overrightarrow{z_2}$. La charnière passive en J_3 et la charnière active en I_3 permettent de positionner le panneau 3 par rapport au bras 2. Nous considérerons que chacune de ces charnières permet les 3 rotations de l'espace entre les solides, et que seule la charnière active

contient le ressort de torsion nécessaire au déploiement. Il en est de même pour les charnières passives en J_4 et J_5 ainsi que les charnières actives en I_4 et I_5 qui positionnent respectivement le panneau 4 par rapport à 3 et le panneau 5 par rapport à 4.

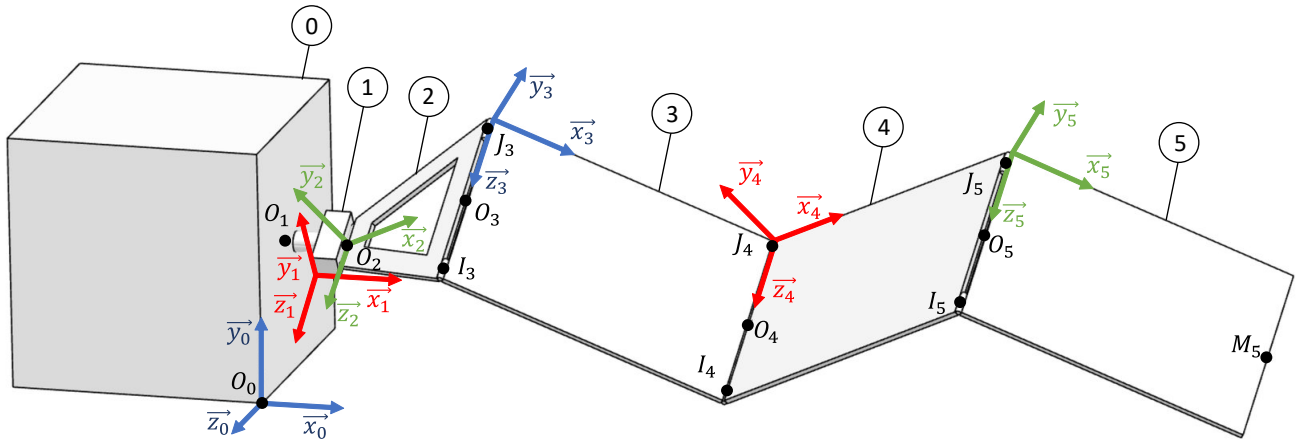


FIGURE 4 – Schéma et paramétrage d'un système de panneaux solaires lors du déploiement.

Notations :

- le torseur des actions mécaniques du solide i sur le solide j sera noté $\{\mathcal{T}_{i\to j}\}$;
- les torseurs cinématique, cinétique et dynamique du solide j par rapport au référentiel i seront notés respectivement $\left\{\mathcal{V}_{j/i}\right\}$, $\left\{\mathcal{C}_{j/i}\right\}$ et $\left\{\mathcal{D}_{j/i}\right\}$;
- La vitesse du point M appartenant au solide j dans son mouvement par rapport au solide i sera notée $\overrightarrow{V}_{j,i}(M)$ et son accélération $\overrightarrow{a}_{j,i}(M)$.

2 Déploiement des panneaux solaires

2.1 Analyse du mécanisme

La première étape est d'analyser la construction du système pour proposer une modélisation de son architecture. Pour cela, nous ne considérerons qu'un des deux systèmes de panneaux, tel que représenté à la figure **4**. Les ressorts de torsion ne sont pour l'instant pas considérés.

18. Etablir le graphe de liaisons du mécanisme.

19. Etablir le schéma cinématique du mécanisme. Il est possible de réaliser ce schéma dans la configuration où les panneaux sont complètement déployés.

2.2 Dynamique du déploiement

Afin de simplifier l'étude, nous considérons un système constitué du bras, noté 2, et d'un seul panneau solaire, noté 3. L'arbre 1 est considéré comme bloqué lors du déploiement avec $\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1}$, ce qui permet de considérer un problème plan tel que représenté à la figure **5**. Le bras 2 est en liaison pivot d'axe $(O_2, \overrightarrow{z_0})$ par rapport au bâti 0, le panneau 3 est en liaison pivot d'axe $(O_3, \overrightarrow{z_0})$ par rapport au bras 2. Le centre de masse du bras 2 est nommé G_2 et celui du panneau 3 est nommé G_3. Nous considérons deux ressorts de torsion dans les liaisons pivots : le ressort de la charnière principale (entre 2 et 0) de raideur K_2, et le ressort de la charnière active entre 3 et 2 de raideur K_3. En configuration repliée, les valeurs initiales des angles α_2 et α_3 sont respectivement $+90°$ et $-180°$. Un mécanisme permet de bloquer les liaisons pivots lorsque les angles α atteignent 0. Le cahier des charges impose un déploiement en moins de 8 secondes et à ce qu'aucun point ne soit à une distance supérieure à 1,0 m du point O_2 suivant $\overrightarrow{y_0}$ lors du mouvement.

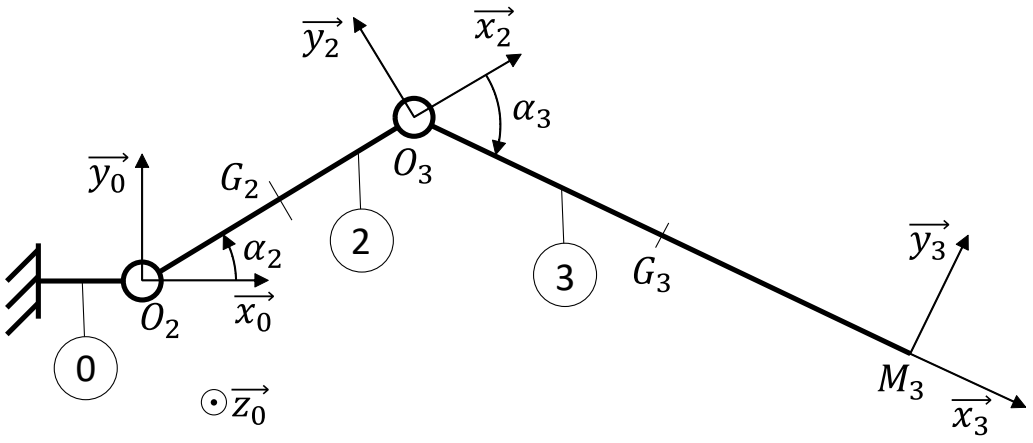


FIGURE **5** – Schéma du système étudié

Hypothèses :

- Les solides sont considérés rigides et indéformables ;
- Les vibrations dues aux mécanismes de blocage des charnières sont négligées ;
- Les actions de la gravité sont négligées.

Données[3] :

$$\overrightarrow{O_2G_2} = \frac{L}{4}\,\overrightarrow{x_2} \qquad \overrightarrow{O_2O_3} = \frac{L}{2}\,\overrightarrow{x_2} \qquad \overrightarrow{O_3G_3} = \frac{L}{2}\,\overrightarrow{x_3} \qquad \overrightarrow{O_3M_3} = L\,\overrightarrow{x_3}$$

- Dimensions du panneau 3 :
  Longueur suivant $\overrightarrow{x_3}$: $L = 1{,}20$ m ;
  Largeur suivant $\overrightarrow{z_3}$: $l = 0{,}84$ m ;
  Epaisseur suivant $\overrightarrow{y_3}$: $e = 0{,}02$ m ;
- Masse du panneau 3 : $m_3 = 4{,}8$ kg ;
- Masse du bras 2 : $m_2 = 3$ kg ;
- Raideurs des ressorts de torsion : $K_2 = 0{,}07$ N · m · rad^{-1}, $K_3 = 0{,}05$ N · m · rad^{-1} ;
- Matrice d'inertie du bras 2 : $I_{G_2,2} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(G_2,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$ avec $\begin{cases} A_2 = 0{,}3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ B_2 = 0{,}5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ C_2 = 1{,}0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{cases}$

20. Le référentiel $\mathcal{R}_0$ du satellite est-il Galiléen ? Si ce n'est pas le cas, quelles considérations permettraient de l'assimiler à un référentiel Galiléen ?

Le référentiel $\mathcal{R}_0$ du satellite sera considéré comme Galiléen dans la suite du sujet.

21. Montrer que la matrice d'inertie du panneau 3 peut se mettre sous la forme suivante et exprimer ses composantes en fonction de m_3, L, l et e.

$$I_{G_3,3} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(G_3,\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_3})} \tag{11}$$

22. L'action du ressort de torsion s'exprime comme un moment $\overrightarrow{M}_{O_2,0\to2}$ appliqué par le solide 0 sur le bras 2 tel que $\overrightarrow{M}_{O_2,0\to2} = -K_2\,\alpha_2\,\overrightarrow{z_0}$ où K_2 est sa constante de raideur. De même le second ressort applique un moment $\overrightarrow{M}_{O_3,2\to3} = -K_3\,\alpha_3\,\overrightarrow{z_0}$ du bras 2 sur le panneau 3. Exprimer selon le repère $\mathcal{R}_2$ du bras 2 les torseurs des actions mécaniques $\{\mathcal{T}_{0\to2}\}$ et $\{\mathcal{T}_{2\to3}\}$.

23. Exprimer la vitesse $\overrightarrow{V}_{2,0}(G_2)$ du point G_2 de 2 par rapport à 0 et la vitesse $\overrightarrow{V}_{3,0}(G_3)$ du point G_3 de 3 par rapport à 0.

24. Exprimer les accélérations $\overrightarrow{a}_{2,0}(G_2)$ et $\overrightarrow{a}_{3,0}(G_3)$ dans le repère $\mathcal{R}_2$ du bras 2.

3. Les données numériques sont représentatives du système, mais ne correspondent pas aux valeurs réelles.

25. En déduire les expressions du torseur dynamique $\left\{\mathcal{D}_{2/0}\right\}$ au point O_2 et de $\left\{\mathcal{D}_{3/0}\right\}$ au point O_3, en fonction des angles α_2 et α_3, de leurs dérivées temporelles et de L, m_i et C_i ($i \in (2,3)$).

26. Exprimer les deux équations différentielles reliant α_2, $\dot{\alpha}_2$, $\ddot{\alpha}_2$, α_3, $\dot{\alpha}_3$ et $\ddot{\alpha}_3$.

27. Montrer qu'elles peuvent s'exprimer sous la forme suivante en fonction de L, m_2, m_3, C_2 et C_3 :

$$\begin{cases} A(\alpha_3)\,\ddot{\alpha}_2 + B(\alpha_3)\,\ddot{\alpha}_3 - C(\alpha_3)\,(\dot{\alpha}_3 + \dot{\alpha}_2)^2 + K_2\,\alpha_2 - E\,\alpha_3 = 0 \\ F\,\ddot{\alpha}_3 + G(\alpha_3)\,\ddot{\alpha}_2 + H(\alpha_3)\,(\dot{\alpha}_2)^2 + K_3\,\alpha_3 = 0 \end{cases} \tag{54}$$

2.3 Validation des résultats

Les équations précédentes sont résolues numériquement, permettant d'obtenir les courbes des figures **6** et **7**.

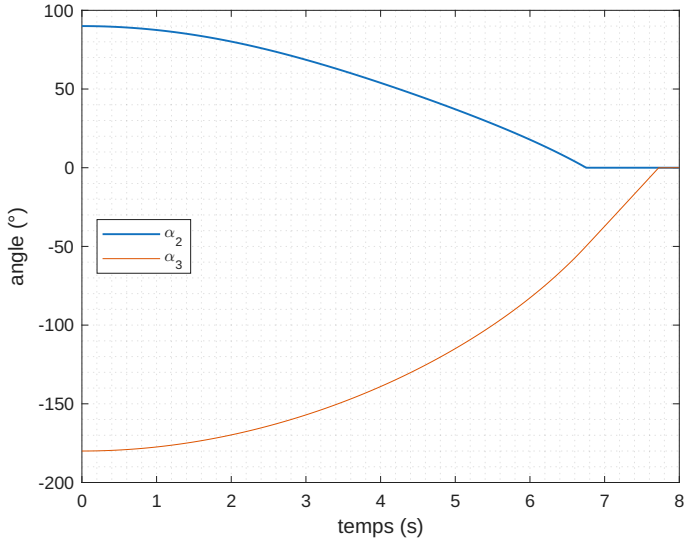


FIGURE **6** – Evolution des angles α_2 et α_3 au cours du temps

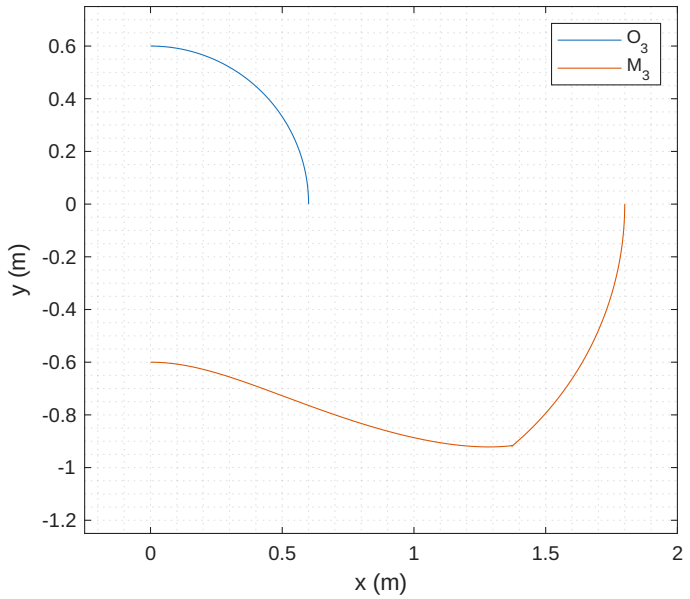


FIGURE **7** – Trajectoires des points O_3 et M_3 lors du déploiement

28. Les équations précédentes sont-elles valables pour l'ensemble du mouvement représenté à la figure **6** ? Si ce n'est pas le cas, qu'a-t-il fallu modifier pour obtenir ces courbes ?

29. En se basant sur les figures 6 et 7, les critères du cahier des charges sont-ils respectés ?

30. Quel phénomène supplémentaire interviendra à $t = 6{,}75$ s ? Quel composant mécanique doit être ajouté aux charnières pour réduire ce phénomène ? Ce composant pourrait-il impacter le respect du cahier des charges ?

3 Orientation des panneaux solaires

Nous considérons désormais les panneaux déployés et verrouillés. L'arbre 1 de la figure **4** permet d'orienter les panneaux autour de l'axe $(O_1,\overrightarrow{x_1})$ afin d'obtenir la meilleure inclinaison pour la production d'électricité à partir des rayons du Soleil. La rotation de l'arbre est obtenue par un système nommé SADA (Solar Array Drive Assembly) qui contient un moteur et un réducteur (figure **8**). La commande de ce système est réalisée par deux boucles de contrôle permettant de maîtriser la vitesse angulaire et la position angulaire. L'étude suivante propose de modéliser la commande de ce système afin de vérifier ses performances.

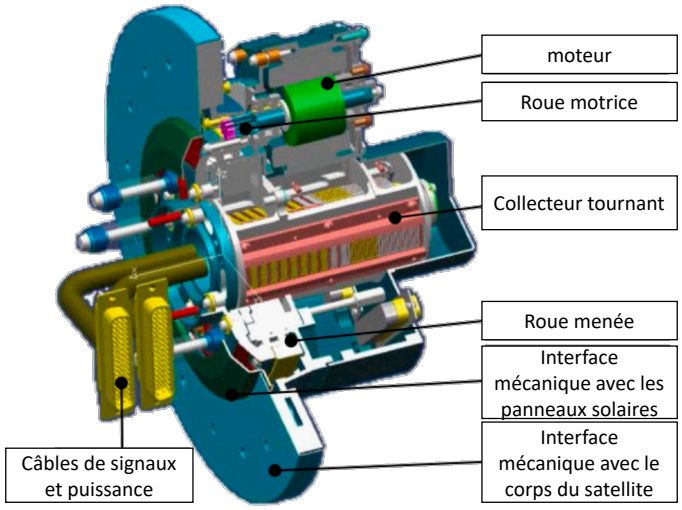


FIGURE **8** – Composition du Solar Array Drive Assembly (SADA)

Dans la suite du sujet nous considérerons le comportement du système comme cohérent avec les hypothèses des systèmes linéaires, continus et invariants.

La consigne de position angulaire est comparée à la position réelle de l'arbre de sortie du réducteur grâce à un capteur angulaire de gain unitaire. Un comparateur de gain $K_G = 10$ V/rad permet alors de convertir la différence angulaire en une tension U. Cette tension est alors comparée à l'image de la vitesse de rotation du moteur $\omega_m(t)$, mesurée par un codeur incrémental de gain $K_C = 1\ \text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$. La différence est corrigée par un régulateur de vitesse de fonction de transfert $H_v(p)$ avant d'être modulée par le variateur de tension de gain $K_a = 1{,}3$ pour obtenir la tension moteur U_m. Le moteur est modélisé par un système du premier ordre de gain $K_m = 1{,}8\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ et de constante de temps $\tau_m = 0{,}016$ s. Le réducteur en sortie de moteur a un rapport de réduction de 18 : 1.

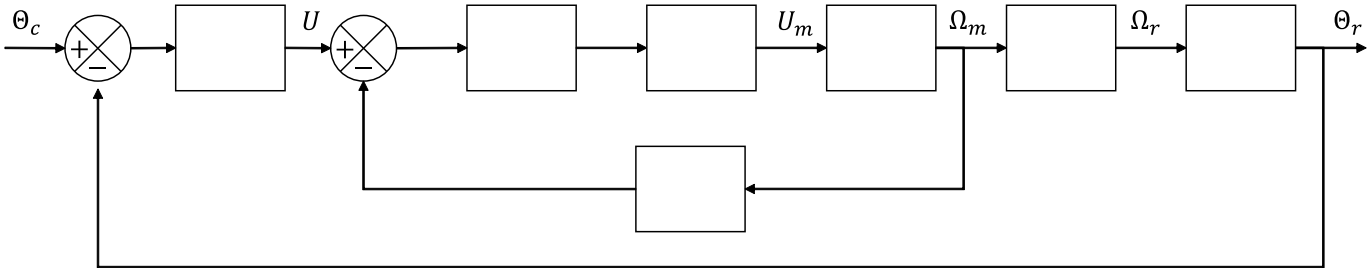


FIGURE **9** – Schéma de la commande

31. Compléter le schéma figure **9** pour représenter les éléments du système de commande.

32. En considérant $H_v(p) = K_v$, montrer que la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{\Omega_m}{U}$ peut s'écrire sous la forme d'un système du premier ordre dont on exprimera le gain K_1 et la constante de temps τ_1 en fonction de τ_m, K_m, K_a, K_v et K_C.

33. Considérons uniquement la boucle correspondant à $H_1(p)$. Pour une entrée en échelon d'amplitude U_0, quelle doit être la valeur de K_v pour que l'erreur statique en sortie soit inférieure à 5% de $\frac{U_0}{K_C}$?

34. Modifier le schéma de commande de la figure **9** pour inclure un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ à la boucle d'asservissement en position angulaire.

35. En considérant un correcteur proportionnel pour $C(p)$, exprimer la fonction de transfert du système en boucle ouverte. Quels sont son ordre et sa classe ?

36. Exprimer l'erreur statique du système pour une consigne de position angulaire en échelon.

37. L'erreur est-elle nulle pour une consigne en rampe ? Si ce n'est pas le cas, quel type de correcteur faudrait-il alors envisager pour annuler cette erreur ?

⋆ ⋆
⋆

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Propagation d'un signal
- Grandeurs, unités, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur
- Référentiels non galiléens
- Calcul infinitésimal du physicien : dérivées et différentielles
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Équations différentielles linéaires du second ordre
- Modélisation des liaisons, graphe des liaisons et schéma cinématique
- Chaînes de solides : liaisons équivalentes, mobilité et hyperstatisme

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/x-ens/mp