Concours d'admission de l'École polytechnique et des ENS (X-ENS), France

Session 2026, filière MPI

Mathématiques A

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Préliminaires
- A- Principe du maximum pour les polynômes
- B- Inégalité de Von Neumann
- C- Hausdorffien et rayon numérique
- D- Conjecture de Crouzeix

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/x-ens/mpi/2026/maths-a

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2026

LUNDI 13 AVRIL 2026
08h00 - 12h00

FILIERES MP-MPI - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES A

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Préambule et notations

Dans tout le texte, la lettre $\mathbf{C}$ désigne le corps des nombres complexes muni de la conjugaison complexe $z \mapsto \overline{z}$. Pour $z \in \mathbf{C}$, on notera $|z| := \sqrt{z\overline{z}}$ le module de z. La lettre $\mathbf{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des nombres réels qui sont positifs ou nuls. Pour $x \in \mathbf{C}$ et $\delta \in \mathbf{R}_+$, on notera

$$\mathbb{D}(x,\delta) := \{\ z \in \mathbf{C} \mid |z-x| \leqslant \delta\ \} \text{ et } \partial\mathbb{D}(x,\delta) := \{\ z \in \mathbf{C} \mid |z-x| = \delta\ \}$$

respectivement le disque fermé et le cercle centrés en x et de rayon δ.

(I) Pour $n \geqslant 1$ entier, on considère le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ que l'on munit de l'application $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ définie par

$$(x,y) \mapsto \langle x|y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y}_i,$$

où les x_i (resp. y_i) sont les coordonnées de x (resp. y). On notera aussi pour $x \in \mathbf{C}^n$,

$$\|x\| := \sqrt{\langle x|x\rangle}\,.$$

Les candidates et candidats pourront utiliser sans justification les faits suivants :

- Pour $x \in \mathbf{C}^n$ fixé, l'application $\varphi_x : y \mapsto \langle x|y\rangle$ est semi-linéaire au sens où $\varphi_x(y+\alpha y') = \varphi_x(y) + \overline{\alpha}\varphi_x(y')$ alors que $\psi_y : x \mapsto \langle x|y\rangle$ est linéaire ;
- $x \mapsto \|x\|$ est une norme sur $\mathbf{C}^n$;
- $|\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

Par analogie avec le cas euclidien, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est souvent appelé produit scalaire hermitien et lorsque $(u_1,\ldots,u_n)$ est une famille de vecteurs de $\mathbf{C}^n$ telle que $\langle u_i|u_j\rangle = 0$ pour $i \neq j$ et $\|u_i\| = 1$ avec $1 \leqslant i,j \leqslant n$, on dira que $(u_1,\ldots,u_n)$ est une base orthonormale.

(II) Pour deux entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ désigne les matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbf{C}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) := \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{C})$ les matrices carrées $n \times n$.

(i) Étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, on notera ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C})$ sa transposée et $\overline{A}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués dans $\mathbf{C}$ des coefficients de A. Les éléments de $\mathbf{C}^n$ seront identifiés aux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$. On notera aussi $A^* := {}^t\overline{A}$. On pourra utiliser sans justification que pour tous x et y dans $\mathbf{C}^n$, on a

$$\langle x|y\rangle = {}^t x\,\overline{y} \text{ et } \langle Ax|y\rangle = \langle x|A^*y\rangle\,.$$

(ii) On considère pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

$$|||A||| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

qui définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ (on ne demande pas de le démontrer) appelée norme subordonnée. Lorsque $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est inversible, on définit le **conditionnement** de P par

$$\mathrm{cond}(P) := |||P||| \cdot |||P^{-1}|||\,.$$

(iii) Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dite **unitaire** si $A^*A = I_n$. Elle est dite **hermitienne** si $A^* = A$. On pourra utiliser sans démonstration que A est unitaire si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{C}^n$, on a $\|Ax\| = \|x\|$ ou encore si et seulement si les colonnes de A forment une base orthonormale.

(III) Pour $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$, on notera $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont les coefficients diagonaux sont données par les λ_i. Le théorème de réduction suivant pourra, et devra, être utilisé.

Théorème *Soit A une matrice unitaire (resp. hermitienne). Il existe alors une matrice unitaire U telle que*

$$A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)U^{-1}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A qui sont alors de module 1 (resp. réelles).

Autrement dit une matrice unitaire (resp. hermitienne) est diagonalisable en base orthonormale pour le produit scalaire hermitien avec valeurs propres de module 1 (resp. réelles).

(IV) Pour tout polynôme à coefficients complexes $p = \sum_{i=0}^{r} p_i X^i \in \mathbf{C}[X]$ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on rappelle que $p(A)$ est la matrice $\sum_{i=0}^{r} p_i A^i$. On s'intéresse alors à $|||p(A)|||$ que l'on essaie de majorer par

$$\|p\|_S := \sup_{\alpha \in S} |p(\alpha)|$$

pour un ensemble S compact qui, bien sûr, va dépendre de A.

Les candidates et candidats sont invités à ne pas rester bloqués sur une question (notamment celles, plus difficiles, situées en fin de partie). On attend toutefois un traitement de portions substantielles de chacune d'elles, plutôt qu'un « grappillage » de points.

Dans toute la suite, on considère $n \geqslant 1$ entier.

Préliminaires

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Justifier l'existence de $|||A|||$ et montrer que $|||A||| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

2) Dans le cas où A est une matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, donner une expression de $|||A|||$ en fonction des λ_i.

3) Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a $|||AB||| \leqslant |||A||| \cdot |||B|||$.

4) Vérifier que pour U unitaire, on a $|||U||| = 1$ et montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a $|||AU||| = |||UA||| = |||A|||$.

5) On suppose A diagonalisable de sorte qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Montrer que pour $\mathrm{cond}(P)$ défini dans le préambule et $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A, on a pour tout $p \in \mathbf{C}[X]$

$$\|p\|_{\sigma(A)} \leqslant |||p(A)||| \leqslant \mathrm{cond}(P)\|p\|_{\sigma(A)}.$$

A- Principe du maximum pour les polynômes

On note $\mathbb{D} := \mathbb{D}(0,1)$ le disque unité et $\partial\mathbb{D} := \partial\mathbb{D}(0,1)$ le cercle unité. Pour $p \in \mathbf{C}[X]$ de degré $n-1$ et $z \in \mathbb{D}$ on se propose de montrer que $|p(z)| \leqslant \|p\|_{\partial\mathbb{D}}$. On suppose ici $n \geqslant 2$. Soit $s = \sqrt{1-|z|^2}$. On introduit la matrice U de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et le vecteur $e_1 \in \mathbf{C}^n$ par

$$U = \begin{pmatrix} z & s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & 1 \\ s & -\overline{z} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \; e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6) Montrer que U est unitaire.

7) Montrer que $p(z) = e_1^* p(U) e_1$.

8) Montrer, en utilisant le théorème du préambule, que

$$|p(z)| \leqslant |||p(U)||| \leqslant \|p\|_{\partial\mathbb{D}}.$$

9) On suppose ici que $|z| < 1$. Montrer que $|p(z)| < \|p\|_{\partial\mathbb{D}}$.

10) Soit S un fermé borné non vide de $\mathbf{C}$. On définit alors $\partial S \subset S$ comme suit : $x \in S \setminus \partial S$ si et seulement s'il existe $\delta > 0$ tel que le disque $\mathbb{D}(x, \delta) \subset S$. Montrer que $\|p\|_S = \|p\|_{\partial S}$.

B- Inégalité de Von Neumann

On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est **une contraction** au sens où $|||A||| \leqslant 1$ et que $p \in \mathbf{C}[X]$. On veut montrer l'inégalité de Von Neumann suivante :

$$|||p(A)||| \leqslant \|p\|_{\mathbb{D}}.$$

11) En utilisant la question 5), traiter le cas où A est unitaire.

12) Montrer qu'il existe une matrice hermitienne D_A (resp. D_{A^*}) dont les valeurs propres sont réelles positives et telle que $D_A^2 = I - A^*A$ (resp. $D_{A^*}^2 = I - AA^*$).
Indication : utiliser le théorème de réduction du préambule.

13) Montrer qu'il existe $q \in \mathbf{C}[X]$ tel que $D_A = q(A^*A)$ et $D_{A^*} = q(AA^*)$.

14) Déduire de la question précédente que

$$A^*D_{A^*} = D_A A^* \qquad AD_A = D_{A^*}A.$$

15) Montrer que la matrice $U \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{C})$ définie par

$$U = \begin{pmatrix} A & D_{A^*} \\ -D_A & A^* \end{pmatrix}$$

est unitaire.

16) En utilisant les matrices

$$U_k = \begin{pmatrix} A & D_{A^*} & 0_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0_n & 0_n & & & I_n \\ -D_A & A^* & 0_n & \cdots & 0_n \end{pmatrix},$$

où k est le nombre de matrice nulle 0_n de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sur la première ligne, démontrer l'inégalité de Von Neumann.
Indication : on notera l'analogie avec la matrice U de la partie A. On montrera ainsi que pour p de degré $\leqslant k+1$, le premier bloc en haut à gauche de $p(U_k)$ est égal à $p(A)$.

17) En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a

$$|||p(A)||| \leqslant \|p\|_{\mathbb{D}(0,|||A|||)}.$$

C- Hausdorffien et rayon numérique

Le Hausdorffien de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est par définition le sous-ensemble suivant de $\mathbf{C}$:

$$\mathcal{H}(A) := \{\langle Ax|x\rangle \mid x \in \mathbf{C}^n,\ \|x\| = 1\}.$$

18) Montrer que $\sigma(A) \subset \mathcal{H}(A)$ où $\sigma(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A.

19) Montrer que pour $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$, $\mathcal{H}(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))$ est l'enveloppe convexe de $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ c'est à dire l'ensemble $\{\sum_{i=1}^n \alpha_i\lambda_i \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \text{ et } \alpha_i \in \mathbf{R}_+\}$.

20) En déduire $\mathcal{H}(A)$ lorsque A est unitaire (resp. hermitienne).

21) Montrer que $\mathcal{H}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \mathbb{D}(0, \frac{1}{2})$.

Indication : on pourra commencer par calculer $\langle Ax|x\rangle$ pour $x = \begin{pmatrix} a \\ be^{i\theta} \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbf{R}_+$ et $a^2 + b^2 = 1$.

22) Montrer que $\mathcal{H}(A)$ est un fermé borné de $\mathbf{C}$.

On introduit le rayon numérique $r(A)$ de A défini par

$$r(A) := \max_{z \in \mathcal{H}(A)} |z|\,.$$

23) Montrer que $\frac{1}{2}|||A||| \leqslant r(A) \leqslant |||A|||$.

Pour la première inégalité, on pourra utiliser l'identité de polarisation

$$4\langle Ax|y\rangle = \langle A(x+y)|x+y\rangle - \langle A(x-y)|x-y\rangle + i\langle A(x+iy)|x+iy\rangle - i\langle A(x-iy)|x-iy\rangle.$$

24) Montrer que $r : A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \mapsto r(A) \in \mathbf{R}_+$ est une norme.

25) En considérant les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A^*$, montrer que l'inégalité $r(AB) \leqslant r(A)r(B)$ n'est pas vraie.

26) On veut dans cette question montrer l'inégalité $r(A^k) \leqslant r(A)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

26-a) On suppose $k \geqslant 1$. On note $\omega_k = \exp(\frac{2i\pi}{k})$ une racine primitive k-ème de l'unité. Partant de l'égalité polynomiale usuelle $X^k - 1 = \prod_{\ell=1}^k (X - \omega_k^\ell)$, en déduire les égalités polynomiales

$$1 - X^k = \prod_{\ell=1}^k (1 - \omega_k^\ell X) \quad \text{et} \quad 1 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^k \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^k (1 - \omega_k^\ell X).$$

26-b) Pour $x \in \mathbf{C}^n$ de norme 1, on pose pour $j = 1, \ldots, k$

$$x_j = \Big(\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{k} (I - \omega_k^\ell A) \Big) x.$$

Déduire de la question précédente la formule suivante :

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \Big[\|x_j\|^2 - \langle \omega_k^j A x_j | x_j \rangle \Big] = 1 - \langle A^k x | x \rangle.$$

26-c) On suppose $r(A) \leqslant 1$. Soit θ un réel quelconque et soit $x \in \mathbf{C}^n$ un vecteur unitaire. En écrivant l'égalité précédente pour $e^{i\theta} A$, montrer que la partie réelle de $1 - e^{ik\theta} \langle A^k x | x \rangle$ est toujours positive et en déduire que $r(A^k) \leqslant 1$.

26-d) En déduire le résultat annoncé, i.e. $r(A^k) \leqslant r(A)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

D- Conjecture de Crouzeix

La conjecture de Crouzeix s'énonce comme suit : pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et pour tout polynôme $p \in \mathbf{C}[X]$ on a

$$|||p(A)||| \leqslant 2 \|p\|_{\mathcal{H}(A)}. \tag{1}$$

27) En étudiant l'exemple de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que la constante 2 dans la conjecture ne peut pas être améliorée.

28) En utilisant le résultat de la question 26), montrer que la formule (1) est toujours vérifiée pour les monômes $p(X) = X^k$ avec $k \geqslant 0$ entier.

29) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $z = r(A) e^{i\theta} \in \mathcal{H}(A)$ et $p(X) = \sum_{k=0}^{r} c_k X^k \in \mathbf{C}[X]$. On suppose qu'il existe $\varphi \in \mathbf{R}$ tel que $c_k = |c_k| e^{i(\varphi - k\theta)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant r$. Montrer que (1) est vérifiée pour le couple (A, p) considéré.

30) Un résultat de Okubo et Ando montre que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est telle que $r(B) \leqslant 1$ alors il existe une matrice inversible X vérifiant $\mathrm{cond}(X) \leqslant 2$ telle que $C := X^{-1} B X$ soit une contraction.

30-a) En utilisant le résultat de Okubo-Ando, montrer que

$$|||p(A)||| \leqslant 2 \|p\|_{\mathbb{D}(0, r(A))}.$$

30-b) En déduire, pour tout disque contenant $\mathcal{H}(A)$ de bord $\mathcal{C}$, que

$$|||p(A)||| \leqslant 2 \|p\|_{\mathcal{C}}.$$

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MPI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Topologie des espaces vectoriels normés
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Nombres complexes et trigonométrie

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/x-ens/mpi