Concours d'admission de l'École polytechnique et des ENS (X-ENS), France

Session 2026, filière PC

Physique B

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I.1 : chaîne monoatomique
- Partie I.2 : chaîne dimérisée, le modèle SSH mécanique
- Partie I.3 : interprétation topologique
- Partie II.1 : mise en équation du problème
- Partie II.2 et II.3 : hypothèse de Lord Kelvin et cas équatorial

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/x-ens/pc/2026/physique-b

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI

ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2026

MERCREDI 15 AVRIL 2026
08h00 - 12h00

FILIERE PC - Epreuve n° 5

PHYSIQUE B

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

De la topologie dans les ondes : de la matière condensée à El Niño



Illustration de l'équivalence topologique entre une tasse à café et un tore, reliés par une déformation continue (Modèle de K. Crane et H. Segerman).

En 2016, le prix Nobel de physique a été décerné à trois chercheurs pour leurs travaux sur les phases topologiques de la matière [1]. L'intérêt pour ce domaine s'est renforcé avec la découverte, en 2005, des isolants topologiques : des matériaux isolants dans le volume mais conducteurs aux frontières, dont le comportement peut être compris à l'aide d'invariants topologiques.

Ce problème propose d'explorer la notion de *topologie* en physique des ondes à travers des chaînes masse-ressort, systèmes mécaniques discrets, puis d'établir le lien avec les ondes équatoriales dans l'océan, à l'origine du phénomène El Niño [2]. Dans une large mesure, les 2 parties étudient des problèmes indépendants.

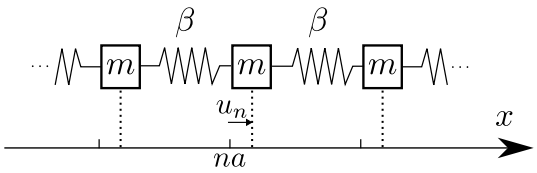
[1] Prix Nobel de Physique 2016 décerné à D.J. Thouless, F.D. Haldane et J.M. Kosterlitz.

[2] P. Delplace, J.B. Marston, A. Venaille, "Topological origin of equatorial waves," *Science*, **358**, 1075-1077 (2017).

Partie I – Chaînes masse-ressort

1. Chaîne monoatomique

On considère une chaîne infinie de masses m reliées par des ressorts de raideur β, séparées par une distance a. On note u_n le déplacement de la n-ième masse par rapport à sa position d'équilibre comme représenté sur la figure suivante :



1. Écrire l'équation du mouvement pour la n-ième masse.

2. Chercher une solution en notation complexe sous la forme $\underline{u_n} = \underline{U_0} e^{i(kna-\omega t)}$ et en déduire la relation de dispersion $\omega(k)$ des ondes se propageant dans cette chaîne.
On rappelle la formule de trigonométrie : $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$.

3. Cette relation de dispersion montre une périodicité en k. On appelle première zone de Brillouin, la période de k centrée sur l'origine. Quel intervalle de k correspond à la première zone de Brillouin ?

4. Représenter la relation de dispersion $\omega(k)$ dans la première zone de Brillouin.

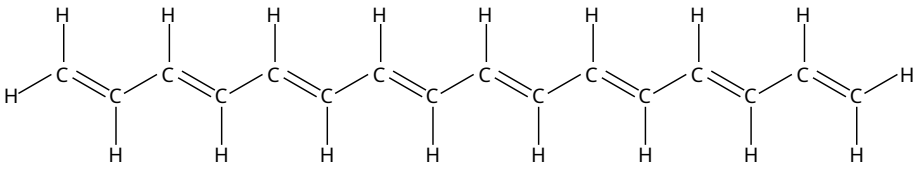
5. Discuter la signification physique de la pente en $k = 0$.

6. Que vaut la vitesse de groupe pour $k = \pm\frac{\pi}{a}$? Qu'est ce que cela signifie concernant la propagation des ondes ?

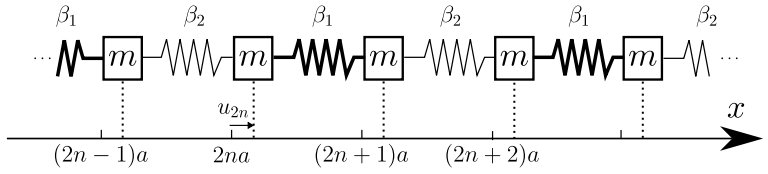
7. On place une source d'excitation sur la masse d'indice 0 qui impose le déplacement en notation complexe $\underline{u_0} = U_0 e^{-i\omega t}$. On choisit une pulsation d'excitation $\omega = \alpha\sqrt{\frac{\beta}{m}}$ avec $\alpha > 2$.
7.1. En reprenant la forme de la solution de la question **2**, montrer que l'on est obligé d'introduire un nombre d'onde complexe $\underline{k} = k' + ik$".
7.2. Trouver la valeur de k' dans la première zone de Brillouin, sachant la formule trigonométrique : $\sin(x + iy) = \sin x \text{ ch } y + i\cos x \text{ sh } y$.
7.3. En déduire les 2 valeurs possibles de k", et justifier qualitativement la solution que l'on gardera pour $n > 0$ et $n < 0$.
7.4. Tracer la solution obtenue.
7.5. Pourquoi parle-t-on d'onde *évanescente* au lieu d'onde *propagative* ? Déterminer les gammes de pulsations correspondant à des ondes propagatives et à des ondes évanescentes ?

2. Chaîne dimérisée : le modèle SSH mécanique

On se propose maintenant d'étudier le modèle dit SSH, proposé par Su, Schrieffer et Heeger en 1979 pour décrire la conduction électronique dans la molécule d'acétylène :



Pour cela, on considère l'analogue mécanique qui consiste en une chaîne de masses identiques m, reliées par des ressorts alternant entre β_1 et β_2 comme représenté sur la figure suivante :



8. Établir les équations du mouvement des masses paires $(2n)$ et impaires $(2n+1)$.

9. On cherche des solutions adaptées à la nouvelle maille de ce réseau en notation complexe sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \underline{u_{2n}}(t) \\ \underline{u_{2n+1}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U_0} \\ \underline{U_1} \end{pmatrix} e^{i(2kna-\omega t)}.$$

Montrer que les équations du mouvement peuvent s'écrire sous la forme d'un problème aux valeurs propres :

$$\omega^2 \begin{pmatrix} \underline{U_0} \\ \underline{U_1} \end{pmatrix} = \mathbf{D}(k) \begin{pmatrix} \underline{U_0} \\ \underline{U_1} \end{pmatrix},$$

et déterminer explicitement la matrice dynamique $\mathbf{D}(k)$.
Pour alléger les notations on introduira les pulsations caractéristiques $\omega_1 = \sqrt{\frac{\beta_1}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{\beta_2}{m}}$.

10. En cherchant les solutions non-nulles du problème précédent, montrer que la relation de dispersion $\omega(k)$ des ondes se propageant dans cette chaîne dimérisée s'écrit :

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{\omega_1^4 + \omega_2^4 + 2\omega_1^2\omega_2^2 \cos(2ka)}.$$

11. Commenter sur la différence entre les cas $\omega_1/\omega_2 = 2/3$ et $\omega_1/\omega_2 = 3/2$.

12. Étant donné la périodicité de cette relation de dispersion, comparer la première zone de Brillouin de cette chaine à celle de la partie précédente ? Commenter.

13. Afin de représenter la relation de dispersion sur la première zone de Brillouin on se propose de déterminer quelques propriétés caractéristiques de celle-ci.
13.1. Quelles sont les solutions pour ω en $k = 0$?
13.2. Quelles sont les solutions en bord de zone de Brillouin (aux bornes de l'intervalle de k considéré) ?
13.3. Évaluer le développement limité en $k = 0$ de ω^2, puis en déduire la vitesse des ondes à basse fréquence.
13.4. Que vaut la pente de la relation de dispersion pour les solutions trouvées en **13.**1 et **13.**2 ?

14. À la lumière de tous ces calculs, tracer la relation de dispersion, en précisant les tangentes et points remarquables de la question précédente, sur la première zone de Brillouin pour les 2 cas :
- $\omega_1/\omega_2 = 2/3$
- $\omega_1/\omega_2 = 1$.

15. Cette question fait écho à la question **7** dans le cas de la chaine monoatomique. Ici, on choisit une pulsation dans l'intervalle entre $\sqrt{2}\omega_1$ et $\sqrt{2}\omega_2$. Comme on n'a pas de solution possible avec $k \in \mathbb{R}$, on introduit une solution de la forme $\underline{k} = k' + ik$".
15.1. Sachant que $\cos(2\underline{k}a)$ doit être réel, trouver les 2 valeurs possibles de k' dans la première zone de Brillouin (on rappelle la formule trigonométrique : $\cos(x+iy) = \cos x \mathrm{ch} y - i \sin x \mathrm{sh} y$).

15.2. Montrer que pour satisfaire la condition sur la fréquence (supposée en début de question) une seule de ces solutions est possible.
15.3. Tracer la forme spatiale des déplacements pour $n > 0$ en supposant $\underline{u_0} = U_0$.

On a représenté sur la figure ci-dessous les domaines de fréquences pour lesquels l'équation de dispersion admet des solutions propagatives ou des solutions évanescentes dans le cas où $\omega_1 = \omega_0 + \delta\omega$ et $\omega_2 = \omega_0 - \delta\omega$ pour différentes valeurs de $\delta\omega$.

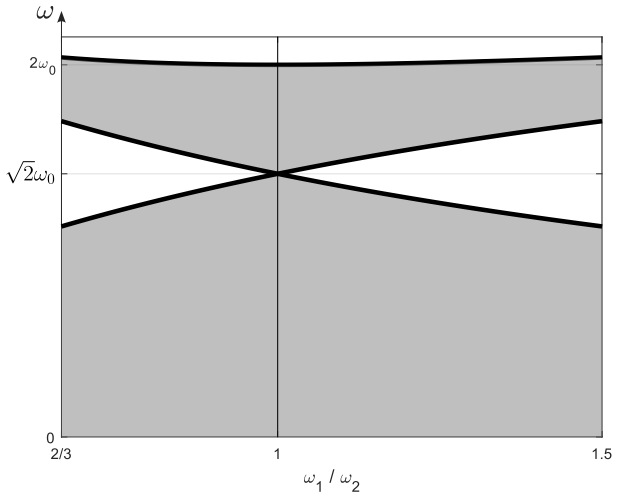


Diagramme de bandes de la chaîne masses-ressorts dimérisée en fonction du rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$.

16. Identifier sur ce diagramme les bandes de propagation et les bandes correspondant à des ondes évanescentes, dites bandes interdites. Que se passe-t-il en $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = 1$?

3. Interprétation topologique

On introduit la matrice identité $\mathbb{I}$ ainsi que les matrices de Pauli $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

17. Écrire en explicitant d_0, $d_x(k)$ et $d_y(k)$ la matrice dynamique $\mathbf{D}(k)$ sous la forme :

$$\mathbf{D}(k) = d_0\mathbb{I} + d_x(k)\,\sigma_x + d_y(k)\,\sigma_y.$$

18. Lorsque k parcourt l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}\right]$, tracer la trajectoire du vecteur $\vec{d}(k) = \begin{pmatrix} d_x(k) \\ d_y(k) \end{pmatrix}$ dans le plan (Oxy). Distinguer les 2 cas $\omega_1 > \omega_2$ et $\omega_1 < \omega_2$.
Sur chacune des trajectoires, ajouter un point sur la courbe de manière à représenter le vecteur $\vec{d}(k)$ ainsi que l'angle $\phi(k)$ formé entre $\vec{d}(k)$ et l'axe (Ox).

19. En parcourant la trajectoire du vecteur $\vec{d}(k)$ lorsque $k \in \left[-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}\right]$, évaluer graphiquement l'intégrale de l'invariant topologique ν défini par :

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/(2a)}^{\pi/(2a)} \mathrm{d}\phi(k).$$

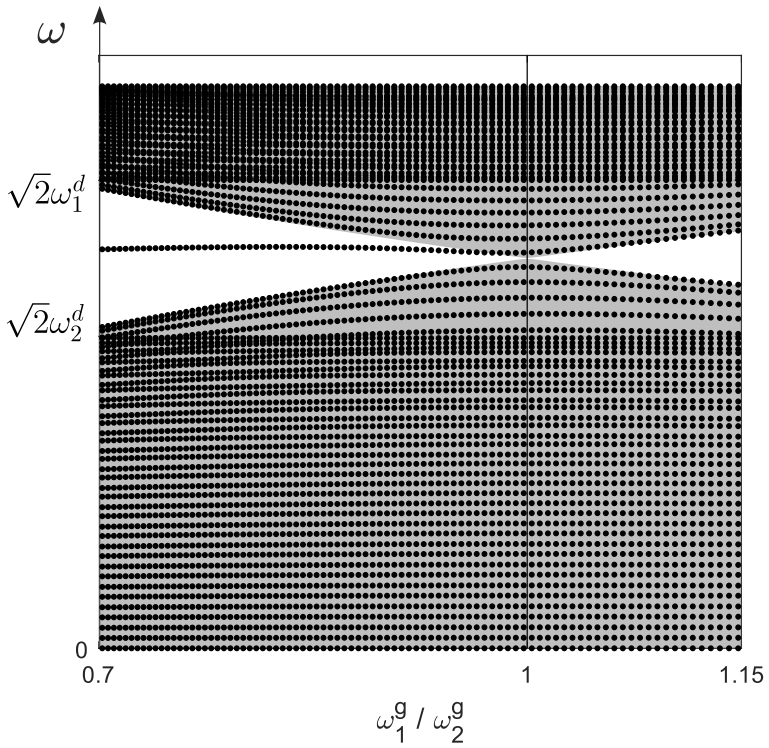
Donner la valeur de ν, appelé invariant topologique, dans les 2 cas : $\omega_1 > \omega_2$ et $\omega_1 < \omega_2$.
Indication : ν n'est rien d'autre que le nombre de tours effectués par le vecteur $\vec{d}(k)$ autour de l'origine lorsque l'on parcourt la trajectoire sur l'intervalle considéré.

Le but de cet invariant topologique est de faire des prédictions sur l'existence de modes, seulement en évaluant celui-ci. Pour illustrer cette propriété, nous considérons une interface entre deux chaînes SSH mécaniques :

— À droite ($n \geq 0$) une chaîne finie de N_d masses avec $\omega_1^d/\omega_2^d > 1$.

— À gauche ($n < 0$) une chaîne finie de N_g masses dont on va faire varier la valeur de ω_1^g/ω_2^g.

Un graphique correspondant aux fréquences propres (points) pour différentes valeurs de ω_1^g/ω_2^g est fourni ci-dessous :



Fréquences propres (points) pour différentes valeurs de ω_1^g/ω_2^g pour $N_d = N_g = 20$.

Curieusement, ce diagramme montre une asymétrie dans la répartition des solutions vis-à-vis du ratio ω_1^g/ω_2^g. Notamment, on remarque des solutions dans la zone blanche (par opposition à grisée) du graphique seulement pour les valeurs de $\dfrac{\omega_1^g}{\omega_2^g} < 1$. C'est justement l'invariant topologique qui va permettre de le prouver.

20. Calculer les invariants topologiques à gauche (ν_g) et à droite (ν_d) dans les différentes parties de ce graphique. Vérifier que le nombre de solutions dans la zone blanche est directement prédit par la valeur $|\nu_\mathrm{g} - \nu_\mathrm{d}|$.

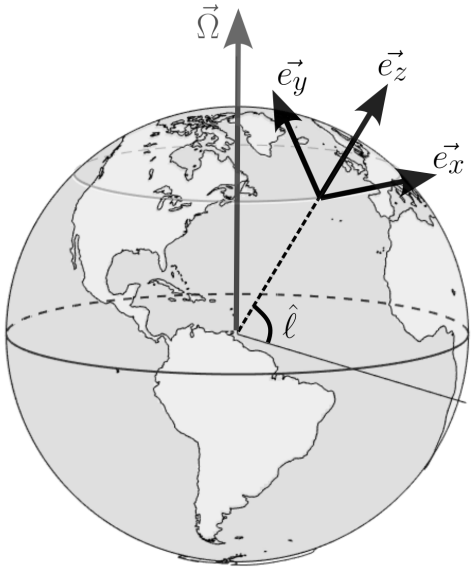
21. En vous aidant du résultat de la question **15**, représenter qualitativement le profil spatial de la solution obtenue dans la zone blanche pour $\omega_1^g/\omega_2^g = 0{,}7$. Pourquoi parle-t-on de mode de bord ?

Partie II – Ondes équatoriales : états de bord topologiques

Dans cette partie, nous allons montrer que les ondes équatoriales en géophysique obéissent à une logique strictement analogue à la chaîne SSH, et peuvent être interprétées comme des modes topologiques piégés à une interface.

1. Mise en équation du problème

On se place dans le système de coordonnées $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ comme représenté sur la figure ci-dessous :



Système de coordonnées à la surface de la Terre.

On considère les océans recouvrant la Terre à l'altitude $z = 0$ comme étant caractérisés par le champ de vitesse $\vec{u}(x, y, t)$ et la hauteur de fluide $h(x, y, t)$. La mise en équation de ce problème donne le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(h\,\vec{u}) = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}.\vec{\operatorname{grad}}\right)\vec{u} = -g\,\vec{\operatorname{grad}}\,h + \vec{F_c} \end{cases} \tag{1}$$

g correspond à l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre et $\vec{F_c}$ correspond à l'effet de la force de Coriolis exercée sur le fluide.

22. Reconnaître et nommer les 2 équations en jeu.

On fait de plus l'hypothèse de mouvements horizontaux de la couche de fluide. Ainsi le terme dû à la force de Coriolis se simplifie sous la forme : $\vec{F_c} = -f\ \vec{e_z} \wedge \vec{u}$, où l'on a introduit le paramètre de Coriolis $f = 2\vec{\Omega}.\vec{e_z}$ (avec $\vec{\Omega}$ le vecteur de rotation de la Terre).

23. On note $\hat{\ell}$ l'angle définissant la latitude, c'est-à-dire l'angle entre le plan équatorial et le point considéré sur la surface de la Terre. Que vaut f en fonction de l'angle $\hat{\ell}$? Que se passe-t-il à l'équateur ?

24. En notant u et v les 2 composantes du champ de vitesse respectivement suivant $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$, écrire les 3 composantes de $\vec{F_c}$ dans le système de coordonnées $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ en fonction de u, v et f.

25. On fait l'hypothèse d'oscillations de faible amplitude à la surface de la terre : $h(x,y,t) = H + \eta(x,y,t)$ avec $\eta(x,y,t) \ll H$, ainsi que u et v sont de faibles amplitudes. Écrire le système d'équations linéarisé au premier ordre vérifié par η, u et v (*remarque :* tous les termes dus au repère mobile sont négligeables dans ces hypothèses).

2. Hypothèse de Lord Kelvin

On commence par choisir une latitude donnée par l'angle $\hat{\ell}$ et on considère l'océan comme étant localement plan dans le système de coordonnées $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$. On ajoute l'hypothèse introduite par Lord Kelvin de considérer le paramètre de Coriolis comme localement constant : $f(\hat{\ell}) = f_0$.

On introduit le vecteur $\Psi = \begin{pmatrix} \eta \\ u \\ v \end{pmatrix}$ et on cherche des solutions en notation complexe sous la forme d'ondes planes : $\underline{\Psi}(x,y,t) = \underline{\Psi_0}\, e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$ avec $\underline{\Psi_0} = \begin{pmatrix} \underline{\eta_0} \\ \underline{u_0} \\ \underline{v_0} \end{pmatrix}$

26. Montrer que l'on obtient un problème aux valeurs propres de la forme :

$$\mathbf{M}\,\underline{\Psi_0} = \omega\,\underline{\Psi_0} \tag{2}$$

Expliciter la matrice $\mathbf{M}$ en fonction de k_x, k_y et des paramètres H, g et f_0.

27. Donner la relation de dispersion de ces ondes.

28. Quelle est la vitesse de propagation (que l'on notera c) des ondes à haute fréquence ?

29. Tracer les 3 branches de ces relations de dispersion pour $k_y = 0$ en s'autorisant des fréquences négatives dans le plan (k_x, ω) pour les cas $f_0 = 1$, $f_0 = 0$ et $f_0 = -1$ (où on a pris une valeur arbitraire de $f_0 = 1$ pour la latitude considérée).

30. Quelles gammes de pulsations correspondent à des bandes interdites ?

Pour les bandes non-constantes (notées bandes négative $(-)$ et positive $(+)$) on parle de modes de Poincaré, alors que la bande plate (notée (0)) est appelée mode géostrophique. Pour chacune des bandes on peut évaluer un invariant topologique $\mathscr{C}$ et on peut montrer qu'ils prennent les valeurs :

$$\left\{\mathscr{C}^{(-)}, \mathscr{C}^{(0)}, \mathscr{C}^{(+)}\right\} = \{2, 0, -2\} \times \text{signe}(f_0).$$

3. Le cas équatorial

On s'intéresse désormais au cas des ondes équatoriales ($\hat{\ell} \approx 0$) et on fait un développement limité du paramètre de Coriolis proche de l'équateur, soit $f(y) = \beta y$.

31. Expliquer en quoi l'équateur peut être vu comme une interface entre deux milieux homogènes de topologies différentes. Quelle est la conséquence étant donné les valeurs des invariants topologiques ?

32. Le problème reste invariant par translation selon la direction x mais le terme $f = \beta y$ brise l'invariance selon y. On cherche donc désormais des solutions sous la forme :

$$\underline{\Psi}(x,y,t) = \underline{\Psi}(y)\, e^{i(k_x x - \omega t)}.$$

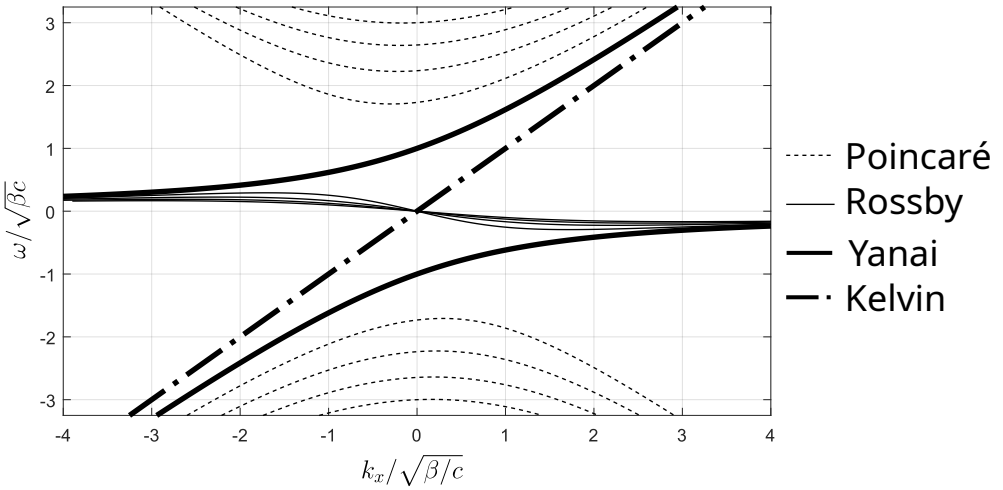
Réécrire l'opérateur matriciel $\underline{\mathbf{M}}(y)$ dans ces conditions.

En découplant les équations, Matsuno a montré en 1966 que les valeurs propres de ce problème satisfont l'équation :

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - \frac{\beta k_x}{\omega} = (2n+1)\frac{\beta}{c} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N},$$

ainsi qu'une solution supplémentaire correspondant à l'onde de Kelvin : $\omega = k_x c$.

L'ensemble des solutions (pour $n \leq 4$) est représenté sur la figure suivante :



33. En utilisant les acquis de la chaîne SSH (questions **19** à **21**), compter le nombre de modes transitant dans chaque bande interdite des modes vues dans l'hypothèse de Kelvin où f était constant et vérifier que ce nombre est compatible avec la différence des valeurs de l'invariant topologique $\mathscr{C}$. Quelles ondes correspondent aux modes topologiques recherchés ?

34. Les ondes de Rossby correspondent approximativement aux solutions du problème :

$$\omega = \frac{-\beta k_x}{k_x^2 + \frac{\beta}{c}(2n+1)} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Évaluer la vitesse de phase de ces ondes et montrer qu'elle est toujours dirigée vers l'Ouest.

35. De même, évaluer la vitesse de groupe de ces ondes et montrer qu'elle change de signe pour une valeur caractéristique de k_x définissant une longueur d'onde critique λ_c que l'on évaluera. En déduire la direction de propagation d'un paquet d'onde de Rossby en fonction de sa longueur d'onde.

36. L'onde de Kelvin joue un rôle prépondérant dans le phénomène El Niño. Pourquoi est-elle responsable d'une accumulation d'eaux au large des côtes du Pérou ?

* *
*

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Propagation d'un signal
- Équations différentielles linéaires du second ordre
- Fonctions usuelles et lecture des graphes
- Référentiels non galiléens
- Description des fluides : statique, cinématique et viscosité
- Dynamique des fluides visqueux

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/x-ens/pc