Concours d'admission de l'École polytechnique et des ENS (X-ENS), France

Session 2002, filière PSI

Mathématiques

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : propriétés générales de l'opérateur Ag
- Partie II : famille d'opérateurs associés à un noyau tronqué

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/x-ens/psi/2002/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

MATHÉMATIQUES

DURÉE: 4 HEURES

Pour les épreuves d'admissibilité, l'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail, et aucun n'échange n'est autorisé entre les candidats.

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, on note $C^m(\mathbb{R};\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^m sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. Soit T un réel strictement positif. On définit l'espace vectoriel E_0 par

$$E_0 = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ T\text{-périodique et continue par morceaux} \},$$

et pour $k \in \mathbb{N}$,

$$F_k = \{ f \in C^k(\mathbb{R};\mathbb{C}),\ T\text{-périodique} \}.$$

On munit l'espace vectoriel E_0 du produit scalaire hermitien $(\cdot \mid \cdot)$ et des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies comme suit :

$$(f \mid g) = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)}g(t)\,dt, \qquad \text{pour} \quad (f,g) \in E_0 \times E_0,$$

$$\|f\|_1 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|\,dt, \quad \|f\|_2 = \left\{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,T]} |f(t)|.$$

Etant donné $g \in E_0$, on pose pour tout $f \in E_0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$A_g f(x) = \frac{1}{T}\int_0^T g(x-t)f(t)\,dt.$$

Le but de ce problème est d'étudier les propriétés de l'opérateur $A_g : f \mapsto A_g f$ défini sur E_0 en fonction de la régularité et de l'intégrabilité de g.

Tournez la page S.V.P.

Partie I

I.1 Soit $g \in E_0$ à valeurs réelles, telle qu'en tout point x_0, g soit continue à droite ou continue à gauche. On suppose que pour toute fonction f dans E_0 à valeurs réelles satisfaisant $f \geq 0$, on a $A_g f \geq 0$. Montrer que $g \geq 0$.

I.2 Montrer que si $(f, g) \in E_\bullet \times E_0$, alors $A_g f = A_f g$.

I.3 Soit $g_0 \in E_0$ définie sur $[0, T]$ par $g_0(t) = 1$ si $t \in [0, T/2[$, et $g_0(t) = 0$ si $t \in [T/2, T[$. Soit $f \in E_0$, et $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(\sigma) = \frac{1}{T} \int_\bullet^\sigma f(t)\, dt.$$

I.3.1 Exprimer $A_{g_\bullet} f$ à l'aide de la fonction $\tilde{f}$.

I.3.2 Montrer que $A_{g_0} f$ appartient à F_0.

I.4 Montrer que si $(f, g) \in E_\bullet \times E_0$, alors $A_g f \in F_\bullet$.

I.5 Etude des propriétés de régularité de $A_g f$:

I.5.1 Soient $k \in \mathbb{N}$, $g \in F_k$ et $f \in F_0$. Montrer que $A_g f \in F_k$.

I.5.2 Soient $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $g \in F_k$ et $f \in F_\ell$. Montrer que $A_g f \in F_{k+\ell}$.

I.6 Etant donnée $f \in E_0$, on introduit ses coefficients de Fourier

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp\left(-\frac{2i\pi nt}{T}\right) dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que pour $(f, g) \in E_0 \times E_0$, on a

$$c_n(A_g f) = c_n(f) c_n(g), \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

I.7 Soit $g \in E_0$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ donnés.

I.7.1 Montrer que $\mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z},\ c_n(g) = \lambda\}$ est fini.

I.7.2 A_g étant considéré comme un endomorphisme de $E_\bullet$, montrer que $\mathrm{Ker}(A_g - \lambda I_{E_0})$ est de dimension finie.

I.7.3 Soit V un sous-espace vectoriel de E_0 de dimension finie, stable par A_g, tel que la restriction $A_g|_V$ de A_g à V soit diagonalisable. Caractériser V.

I.8 Existe-t-il $g \in F_0$ tel que $A_g|_{F_0}$ soit bijective de F_0 sur F_0 ?

I.9 Soit $g \in E_0$. Montrer que

$$\sup_{f \in E_0,\ \|f\|_2 = 1} \|A_g f\|_2 = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(g)|.$$

Partie II

Dans cette partie, on étudie les propriétés de la famille $(A_{k_\varepsilon})_{\varepsilon\in]0,T/2[}$ d'endomorphismes de E_0, où $k_\varepsilon \in E_0$ est la fonction à valeurs réelles *impaire* satisfaisant

$$k_\varepsilon(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \in [0,\varepsilon[\cup\{T/2\} \\ \dfrac{1}{y} & \text{si} \quad y \in [\varepsilon, T/2[\end{cases}$$

On introduit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\alpha_n = \int_0^{\pi n} \frac{\sin u}{u} du, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

II.1 Calculer la norme

$$\|k_\varepsilon\|_1$$

et en déterminer un équivalent lorsque ε tend vers 0.

II.2 Soit $f \in F_1$ et $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p_0 > 2/T$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq p_0$, on note

$$\Phi_p = A_{k_{\frac{1}{p}}} f.$$

Montrer que $(\Phi_p)_{p\geq p_0}$ converge uniformément sur $[0,T]$ (on note Af sa limite). Montrer que A est une application linéaire de F_1 dans F_0.

II.3 Etant donnée $f \in F_1$, calculer les coefficients de Fourier de Af en fonction des α_n, $n \in \mathbb{N}$, et des coefficients de Fourier de f.

II.4 Etude de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

II.4.1 Montrer que la suite $(\alpha_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, puis que $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

II.4.2 Montrer l'existence de $\ell > 0$ tel que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.4.3 En déduire que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n = \alpha_1.$$

II.5 Calculer

$$\sup_{f\in F_1,\, \|f\|_2=1} \|Af\|_2.$$

II.6 Soit $f \in E_0$. Constuire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F_1 telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f en moyenne quadratique dans E_0 et

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{p\in\mathbb{N}} \|Af_{n+p} - Af_n\|_2 = 0.$$

Peut-on en déduire un résultat de convergence en moyenne quadratique pour la suite $(Af_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Espaces vectoriels normés
- Suites et séries de fonctions
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Intégration sur un intervalle quelconque

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/x-ens/psi