Concours d'admission de l'École polytechnique et des ENS (X-ENS), France

Session 2008, filière PSI

Modélisation

Durée : 5 heures

Ce que traite le sujet

- Présentation : Ariane 5 et démarche de modélisation
- Partie 1 : essais expérimentaux et observation des phénomènes
- Partie 2 : modélisation de la propagation des ondes de flexion
- Partie 3 : modélisation des ondes membranaires en 2D
- Partie 3 : solveur numérique par éléments finis
- Partie 3 : influence des paramètres du solveur

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/x-ens/psi/2008/modelisation

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CX8612

Banque commune **École Polytechnique – ENS de Cachan**

PSI

Session 2008

_____

Épreuve de MODÉLISATION

_____

Durée : 5 heures

_____

Aucun document n'est autorisé

L'usage de calculatrices de poche à alimentation autonome, non imprimante et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail (circulaire n°99 018 du 1er février 1999).

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être un erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

_____

Modélisation de la propagation des ondes de choc dans la structure d'Ariane 5



Figure 1 : photographie de la fusée Ariane 5

Le support d'étude proposé est la fusée Ariane 5 (voir figure 1). Créée en 1996, elle est la dernière génération d'une série de lanceurs de satellites initiée en 1979. Elle a pour fonction de mettre en orbite deux satellites. Depuis son premier vol, 31 lancements ont été effectués, avec un taux de réussite supérieur à 90%.

Cette fusée est constituée des éléments suivants (voir figure 2) :

- deux propulseurs latéraux : ils permettent de fournir 90% de la poussée au décollage et sont largués lorsqu'ils sont vides (au bout de deux minutes).
- un étage principal : il contient l'oxygène et l'hydrogène liquides qui permettent de faire fonctionner le moteur principal pendant 10 minutes après le décollage. Une fois vide, il est largué.
- un étage secondaire : il contient les satellites et un moyen de propulsion qui se met en route lorsque l'étage principal est largué. Il permet d'amener les satellites à leur destination finale.

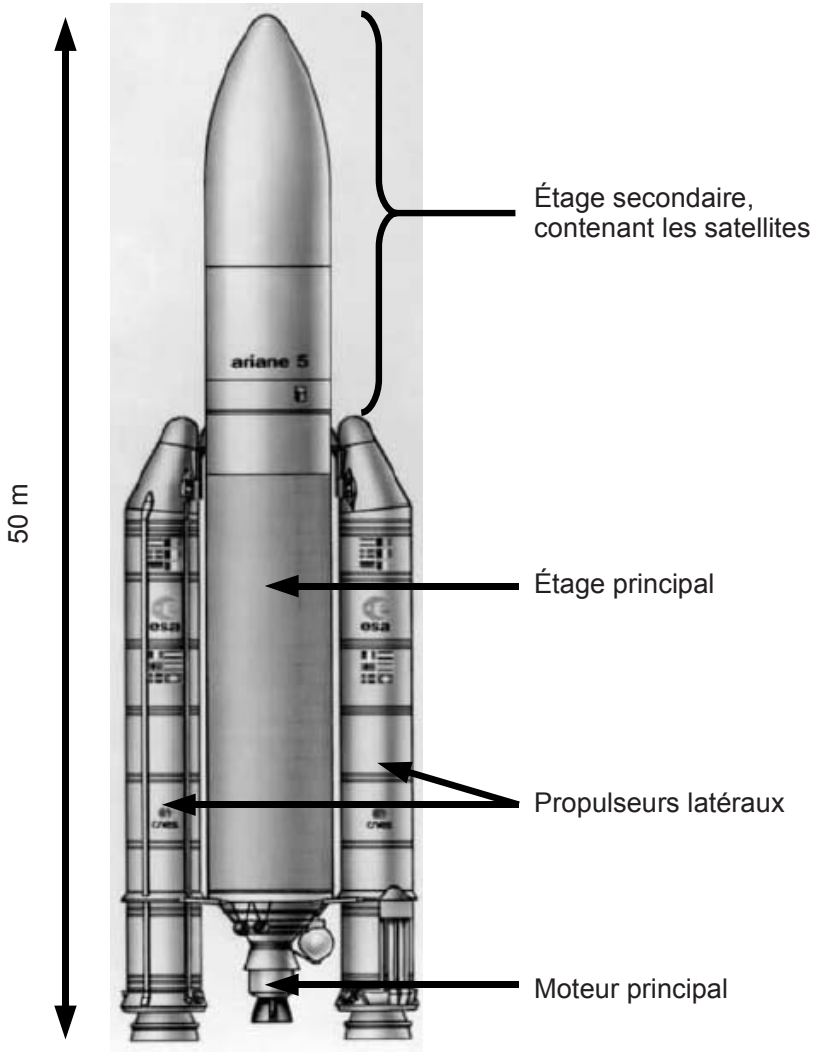


Figure 2 : constitution de la fusée Ariane 5.

Le diagramme FAST partiel de la figure 3 résume les fonctions que doit assurer chaque élément de la fusée.

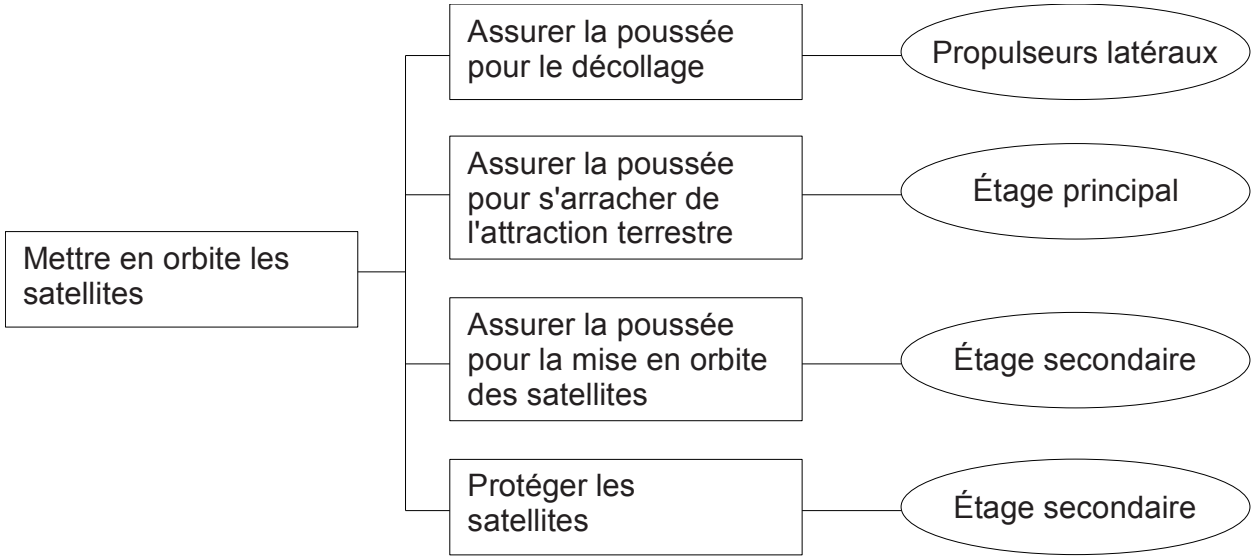


Figure 3 : diagramme FAST partiel d'une fonction de la fusée Ariane 5.

Pour séparer l'étage principal de l'étage secondaire, on utilise trois cordons explosifs (pyrotechniques) qui découpent la fusée (voir figure 4).

Q1 : Expliquer pourquoi il est plus judicieux d'utiliser trois cordons explosifs plutôt qu'un seul.

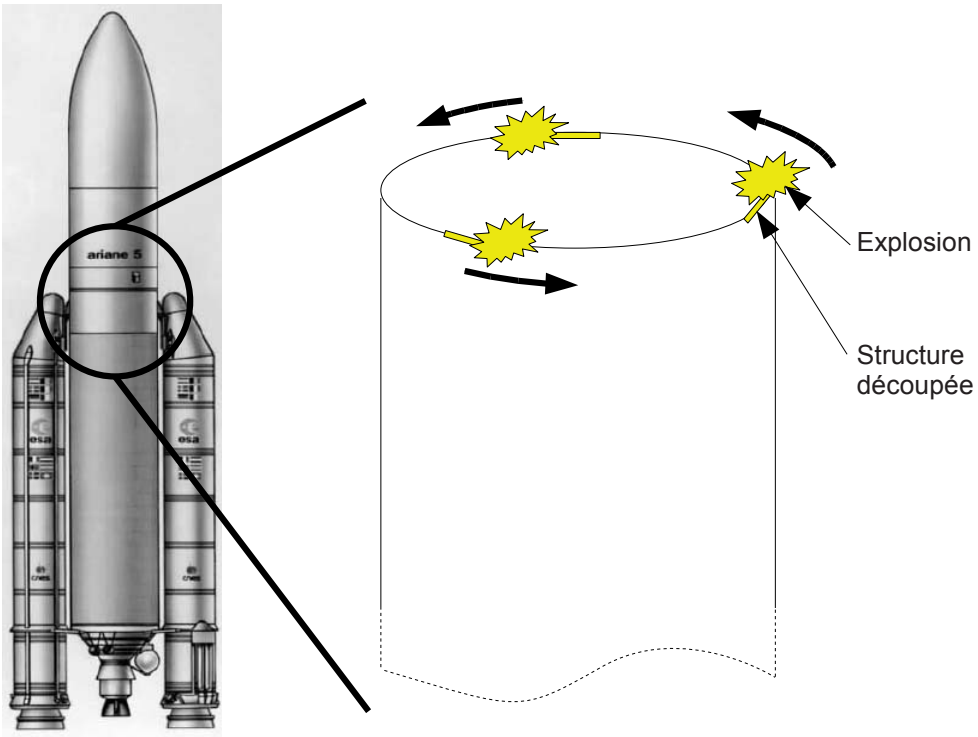


Figure 4 : séparation de l'étage principal et de l'étage secondaire, à l'aide de trois cordons explosifs.

Cette découpe explosive engendre des ondes de chocs qui peuvent se propager dans l'étage secondaire jusqu'aux satellites et éventuellement les endommager. Pour éviter de tels dommages, une solution est d'amortir ces ondes de choc, mais cela nécessite la compréhension de leur propagation au sein de l'étage secondaire. Les ingénieurs du CNES (Centre National d'Étude Spatiale, organisme chargé de maîtriser les technologies spatiales) ont donc lancé un travail de modélisation de cette propagation d'ondes de choc, en s'appuyant largement sur de la simulation numérique afin d'éviter trop de tests coûteux sur des structures réelles.

La démarche de modélisation adoptée est présentée sur la figure 5.

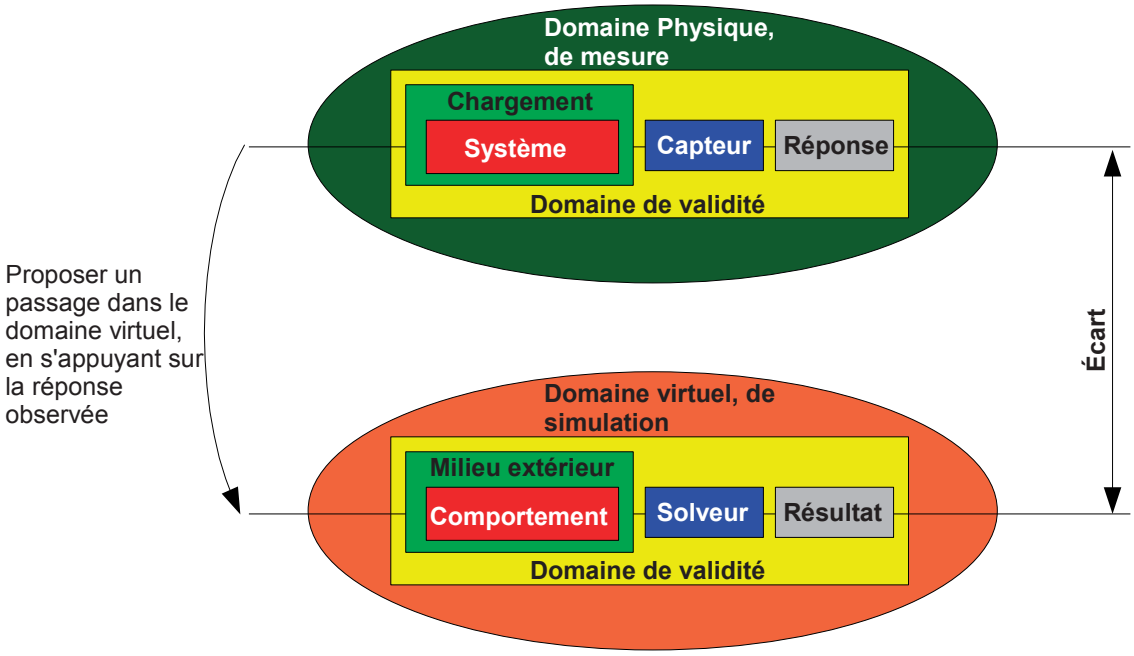


Figure 5 : démarche de modélisation en Sciences de l'Ingénieur.

Cette démarche se compose symboliquement de deux domaines : le domaine physique où l'on fait des mesures sur un système réel, et le domaine virtuel où l'on réalise des simulations sur un système virtuel (analytique, numérique, ...) qui doit représenter le comportement du système réel. Le domaine physique est nécessaire car il est indispensable de s'appuyer sur l'observation des phénomènes réels pour proposer un modèle de comportement et une modélisation du milieu extérieur. Le solveur est un outil qui permet de résoudre les équations et qui donne le résultat de la simulation. La modélisation est pertinente si l'écart entre les réponses expérimentales et les résultats issus de la simulation est petit.

Le sujet est divisé en trois parties. La première partie amène le candidat à se positionner dans le domaine physique en étudiant les mesures effectuées lors d'un essai de découpe par cordon pyrotechnique. Les deuxième et troisième parties amènent le candidat à se positionner dans le domaine virtuel pour modéliser la propagation des ondes de choc hors plan de flexion (deuxième partie) et membranaires (troisième partie). S'il le souhaite, le candidat pourra tirer profit de l'indépendance des trois parties.

Partie 1 : essais expérimentaux et observation des phénomènes mis en jeux

L'objectif de cette partie est d'étudier les mesures effectuées lors d'un essai de découpe pyrotechnique afin de proposer certaines hypothèses de modélisation. Toutes les étapes présentes dans le domaine physique de mesure de la démarche de modélisation (voir figure 5), rappelées dans la figure 6, seront traitées.

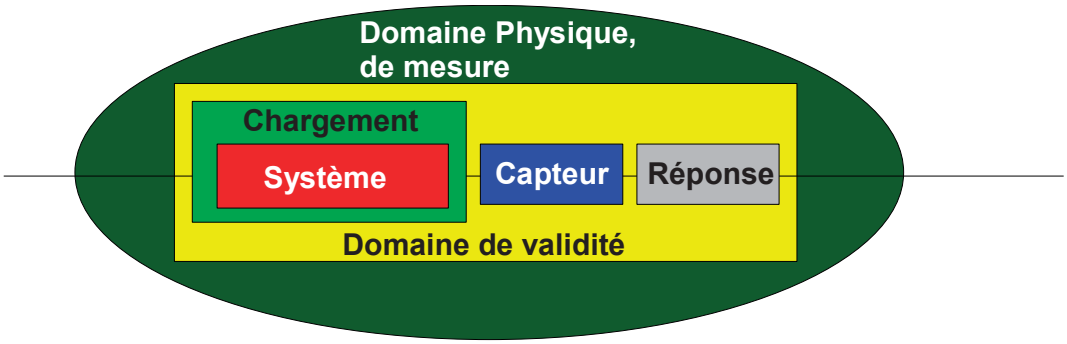


Figure 6 : étapes du domaine physique de mesure de la démarche de modélisation.

Système étudié et chargement imposé

Faire un essai sur une structure réelle étant très coûteux, les ingénieurs ont décidé de réaliser un essai de découpe par cordon pyrotechnique sur un système simplifié, constitué d'une simple plaque rectangulaire, découpée par un seul cordon pyrotechnique (voir figure 7). Ce système peut paraître simpliste face à la complexité d'Ariane 5, mais il permet de bien comprendre les phénomènes mis en jeu lors de la découpe pyrotechnique et de poser les bonnes hypothèses pour modéliser la propagation des ondes de choc dans le système réel muni de ses trois cordons pyrotechniques. La découpe par le cordon pyrotechnique se fait à une vitesse de 7 km/s.

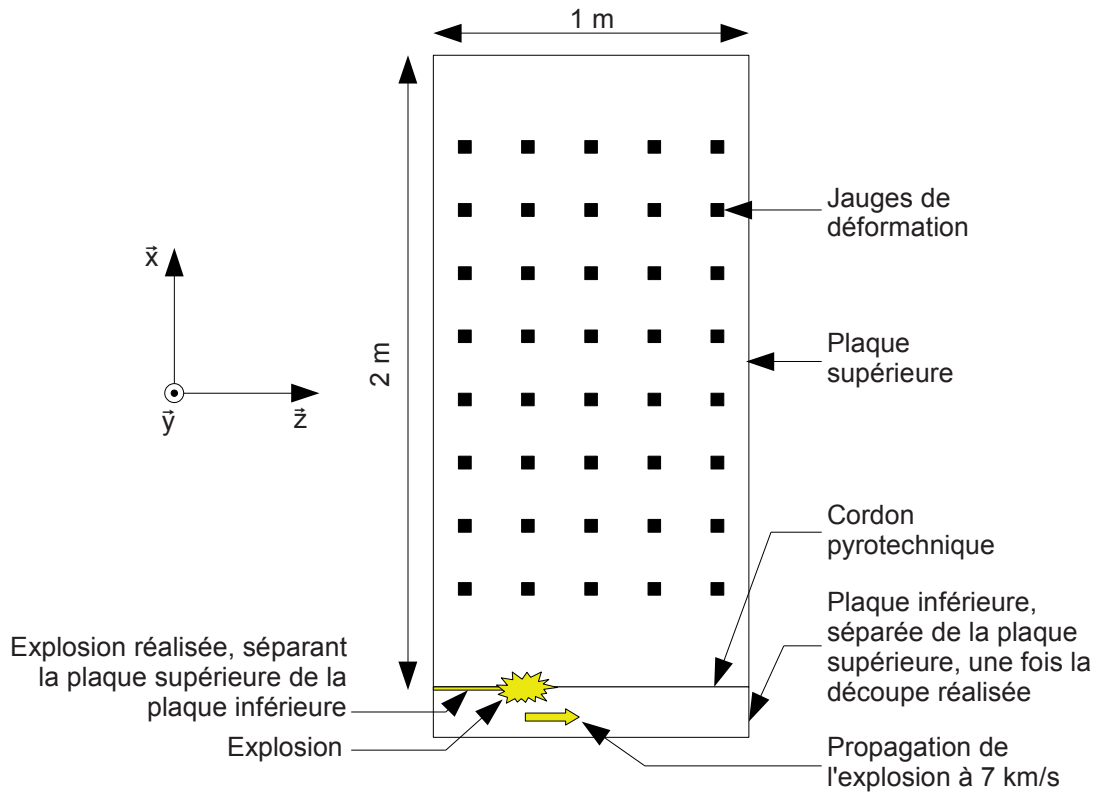


Figure 7 : moyens d'essai sur une plaque rectangulaire.

Capteurs utilisés

Pour mesurer les déformations de la plaque, des jauges de déformation sont réparties sur la surface de la plaque (80 jauges en tout, 40 de chaque côté de la plaque).

Q2 : Expliquer le principe de fonctionnement d'une jauge de déformation.

Il est classique de séparer les mouvements de la plaque en mouvements membranaires de traction compression cisaillement (mouvements selon les directions $\vec{x}$ et $\vec{z}$) et en mouvement hors plan de flexion (mouvements selon $\vec{y}$). Pour mesurer séparément ces deux types de mouvements, on utilise les mesures de deux jauges de déformation, l'une collée sur un côté de la plaque, l'autre collée sur l'autre côté de la plaque, et on fait la demi somme ou la demi différence des signaux mesurés par les jauges.

Q3 : Déterminer si le signal mesuré par la demi somme correspond au mouvement membranaire et le signal mesuré par la demi différence correspond au mouvement hors plan, ou inversement.

Réponses expérimentales obtenues

Les réponses expérimentales et quelques simulations numériques permettent de bien comprendre ce qui se passe à la suite de l'explosion dans cet essai de découpe pyrotechnique. La figure 8 regroupe les réponses obtenues pour la propagation des ondes de flexion dans la plaque (mouvements selon $\vec{y}$).

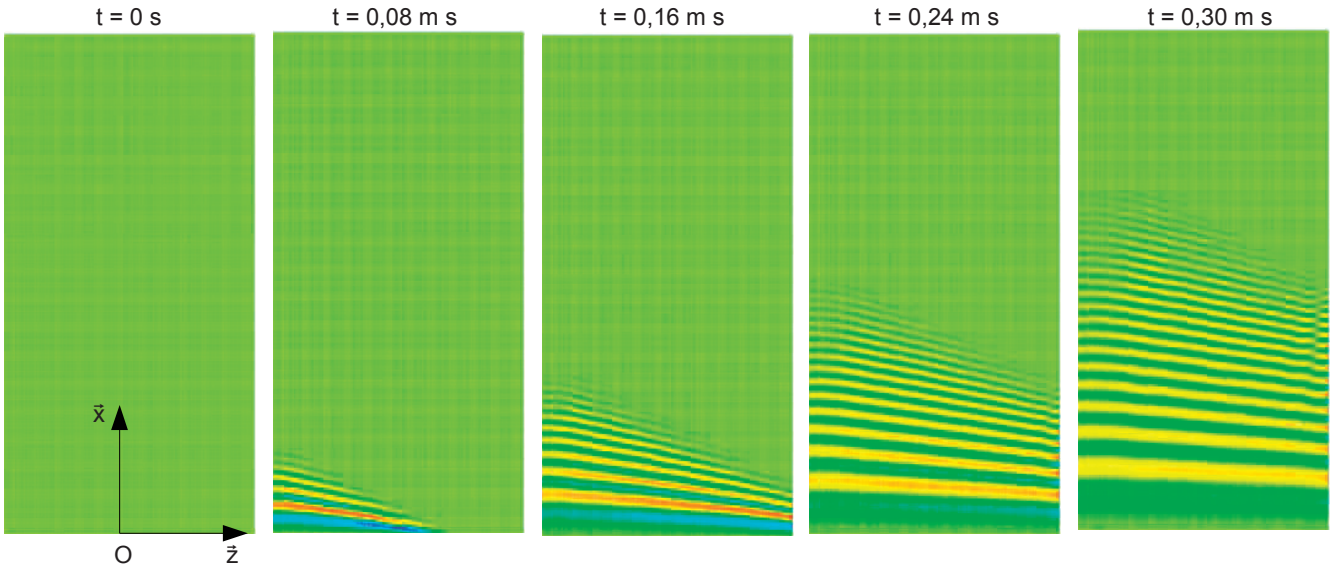


Figure 8 : propagation des ondes de flexion dans la plaque (amplitude selon $\vec{y}$).

Q4 : Expliquer en quoi le côté dispersif de la propagation des ondes de flexion apparaît sur la figure 8.

La figure 9 regroupe des résultats similaires mais concernant les ondes membranaires dans la plaque (mouvements selon les directions $\vec{x}$ et $\vec{z}$).

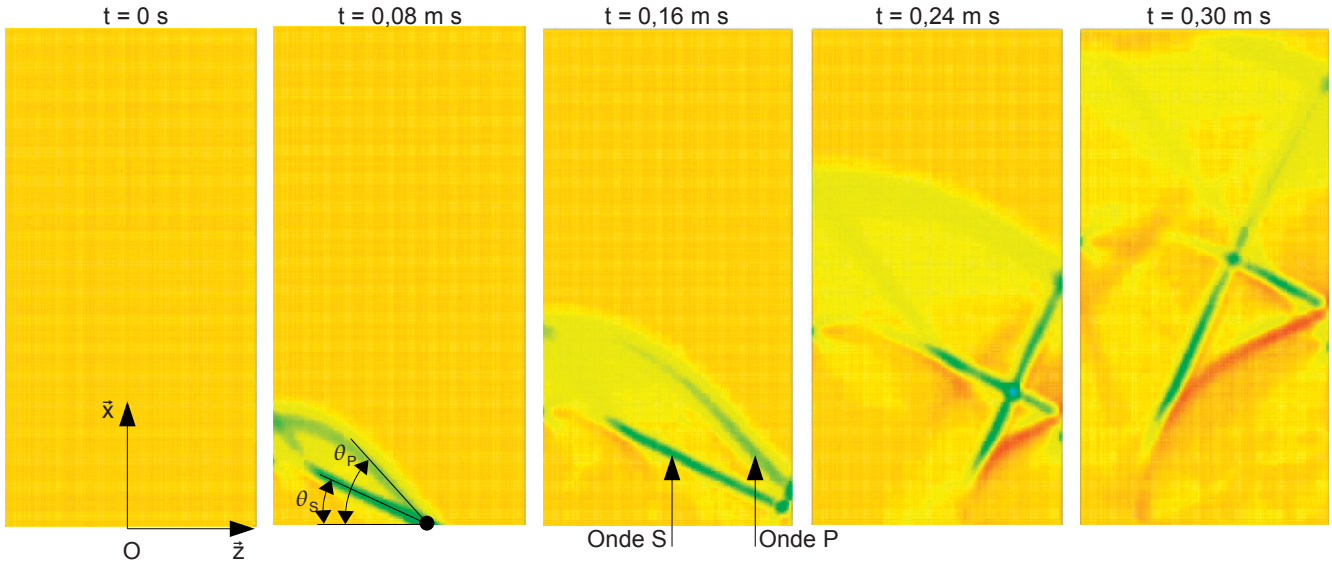


Figure 9 : propagation des ondes membranaires dans la plaque (amplitude selon $\vec{z}$).

Sur la figure 9, on voit apparaître deux ondes de choc : l'onde P et l'onde S. La mécanique des milieux continus appliquée aux plaques permet de montrer que ces ondes, non dispersives, ont une vitesse de propagation $C_P=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ et $C_S=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, où λ, μ et ρ sont des paramètres matériaux donnés en annexes.

Q5 : À partir des données, retrouver les angles $\theta_P = 54°$ et $\theta_S = 26°$ que l'on peut mesurer sur la figure 9. Ne pas hésiter à s'appuyer sur un dessin pour les explications.

Q6 : Expliquer pourquoi il est possible de modéliser la propagation des ondes de flexion par un phénomène de propagation à 1 dimension, alors que la modélisation de la propagation des ondes membranaires nécessite l'établissement d'un modèle à 2 dimensions.

Partie 2 : modélisation de la propagation des ondes de flexion

L'objectif de cette partie est de proposer un modèle et de simuler la propagation des ondes de flexion dans la plaque découpée. Toutes les étapes présentes dans le domaine virtuel de simulation de la démarche de modélisation (voir figure 5), rappelées dans la figure 10, seront traitées.

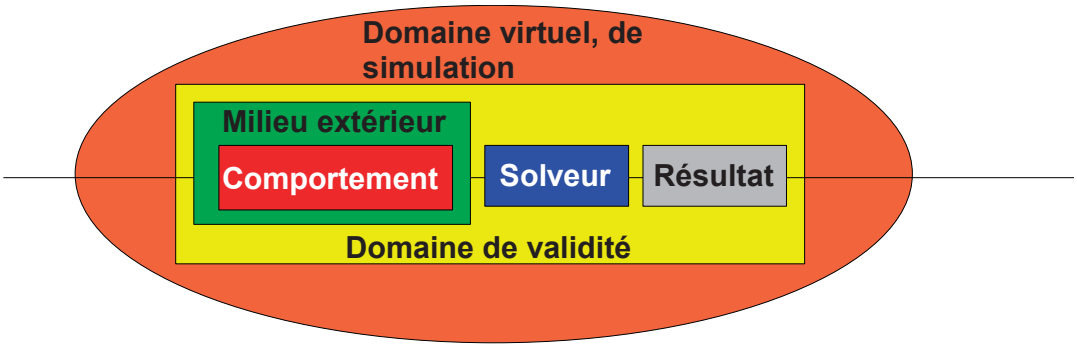


Figure 10 : étapes du domaine virtuel de la démarche de modélisation.

Modélisation du comportement de la plaque

On considère la plaque rectangulaire de l'essai de la partie 1 (voir figure 11). Les dimensions de cette plaque sont L selon $\vec{x}$, e selon $\vec{y}$ et b selon $\vec{z}$. Le repère d'étude $R(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est tel que tous les points M de la plaque sont repérés par $\overrightarrow{OM}=x\vec{x}+y\vec{y}+z\vec{z}$, avec $x\in[0,L]$, $y\in\left[\frac{-e}{2},\frac{e}{2}\right]$ et $z\in\left[\frac{-b}{2},\frac{b}{2}\right]$. ρ est la masse volumique de la plaque. Les valeurs numériques des différents paramètres sont données en annexe du sujet. On appelle "plan médian" le plan à $y=0$ et "section droite" le plan de la plaque à x constant.

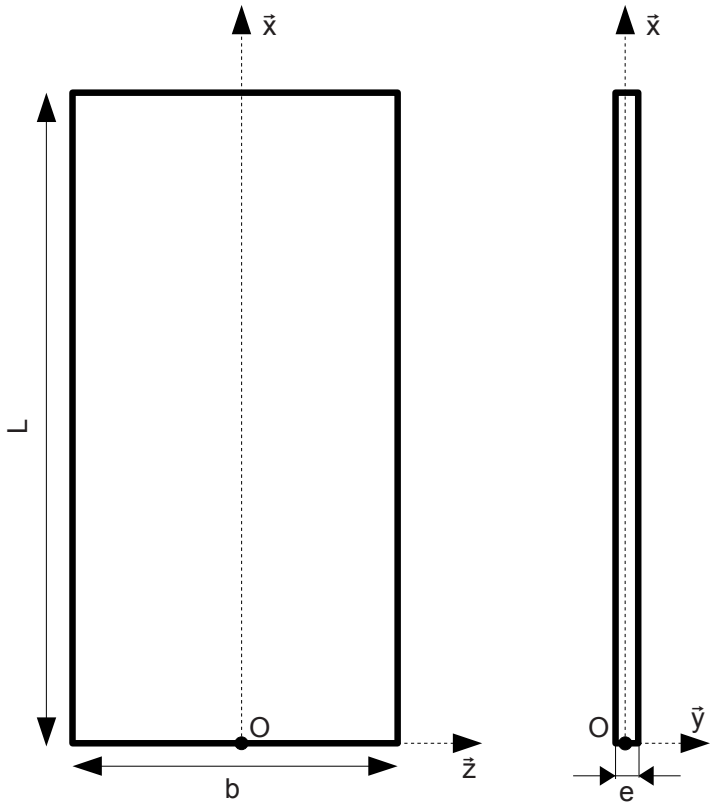


Figure 11 : géométrie de la plaque.

Suite aux résultats d'essais de la partie 1, on s'intéresse à la propagation des ondes de flexion dans le plan $(O;\vec{x},\vec{y})$: les points du plan médian ne se déplacent que sur $\vec{x}$ et sur $\vec{y}$. On suppose que le déplacement des points est décrit par le vecteur $\vec{u}(x,y,z)=-y\theta(x,t)\vec{x}+v(x,t)\vec{y}$.

Q7 : Les ingénieurs ne voulant étudier que les phénomènes vibratoires de flexion dont les fréquences sont inférieures à $10\ kHz$ (pour lesquels les ondes se propagent à une vitesse inférieure à $760\ m.s^{-1}$), calculer la longueur d'onde des vibrations à simuler, et justifier le fait que le déplacement selon $\vec{x}$ puisse être considéré comme linéaire dans l'épaisseur de la plaque (épaisseur selon $\vec{y}$). Proposer alors une interprétation physique de la variable $\theta(x,t)$.

Les efforts à l'intérieur de la plaque sont décrits par un torseur : $\{T(x,t)\}=\left\{\begin{array}{l} F(x,t)\vec{y} \\ M(x,t)\vec{z} \end{array}\right\}_{G_x}$, où G_x (voir figure 12) est le centre de gravité de la section droite à l'abscisse x, et $F(x,t)\vec{y}$ et $M(x,t)\vec{z}$ sont l'effort et le moment qu'exerce la partie de la plaque d'abscisses $[x;L]$ sur la partie de la plaque d'abscisses $[0\ ;x]$. Le volume élémentaire de plaque dV_x compris entre les abscisses x et $x+dx$ est donc soumis aux deux torseurs $-\{T(x,t)\}$ et $\{T(x+dx,t)\}$.

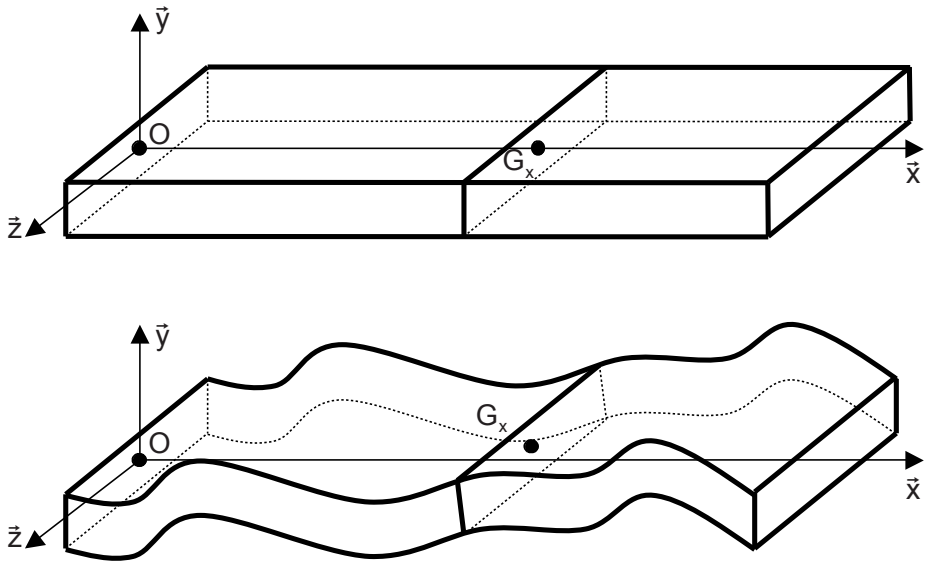


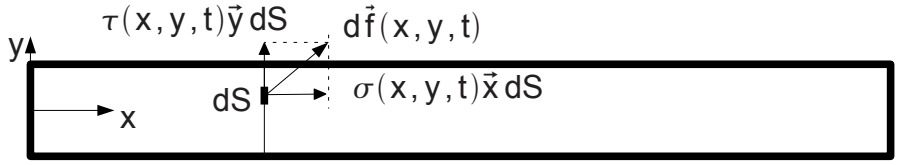
Figure 12 : géométrie de la plaque déformée.

Q8 : En appliquant le théorème de la résultante dynamique sur dV_x en projection sur $\vec{y}$, déterminer une équation entre $v(x,t)$ et $F(x,t)$.

Q9 : En appliquant le théorème du moment dynamique sur dV_x, en projection sur $(G_x;\vec{z})$, déterminer une équation entre $F(x,t)$ et $M(x,t)$. On supposera que l'inertie de dV_x est négligeable.

Q10 : En combinant les deux équations précédentes, montrer que l'équation du mouvement de dV_x s'écrit : $\rho b e \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}$.

Le torseur $\{T(x,t)\}$ est décrit par un champ surfacique d'effort $d\vec{f}(x,y,t) = (\sigma(x,y,t)\vec{x} + \tau(x,y,t)\vec{y})\,dS$. Le théorie de l'élasticité linéaire permet de montrer que $\sigma = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial u_x}{\partial x}$, où E et ν sont des paramètres caractéristiques du matériau utilisé (voir annexe), et u_x est la composante sur $\vec{x}$ du déplacement $\vec{u}$.



Q11 : En intégrant les efforts surfaciques sur une section droite, déterminer une relation entre $M(x,t)$ et $\theta(x,t)$.

On se place dans l'approximation d'Euler Bernoulli, dans laquelle la section droite est supposée rester perpendiculaire au plan médian (voir figure 13).

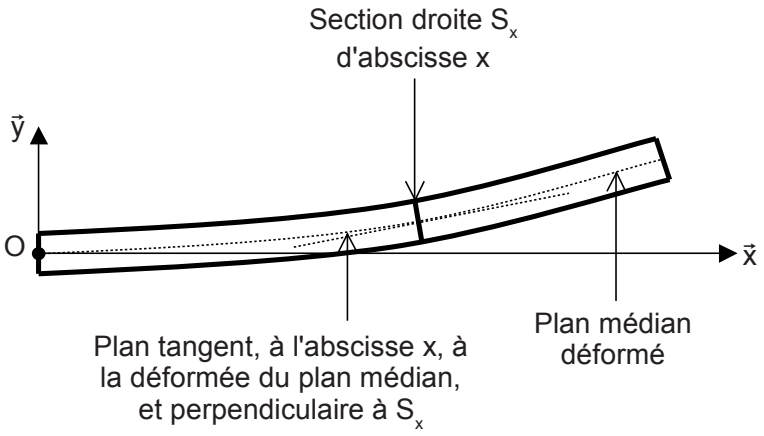


Figure 13 : déformation de la plaque.

Q12 : En utilisant le fait que la section droite reste perpendiculaire au plan médian, déterminer une relation entre $\theta(x,t)$ et $v(x,t)$.

Q13 : En combinant toutes les équations précédentes, montrer que le mouvement de la plaque est géré par l'équation $\rho b e \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{E}{1-\nu^2}\frac{b e^3}{12}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}$.

On considère une onde de flexion qui se propage selon la direction $\vec{x}$ dans la plaque : $v(x,t) = e^{i(\omega t - kx)}$.

Q14 : Déterminer l'équation de dispersion reliant k à ω et montrer que cette relation est dispersive (de manière cohérente aux mesures faites dans la partie 1).

Modélisation du milieu extérieur

La force créée par l'explosion peut être modélisée par la fonction triangle de la figure 14.



Figure 14 : modélisation adoptée pour la force créée par l'explosion du cordon pyrotechnique.

Utilisation d'un solveur analytique

On se propose d'utiliser un solveur analytique basé sur les séries de Fourier pour résoudre les équations de propagation des ondes. Le temps d'observation des phénomènes sera noté T.

On rappelle que toute fonction g(t), périodique de période T, peut être décomposée en séries de Fourier, sur la base de fonctions $e^{i\omega_n t}$, $\omega_n = 2\pi n/T$, de la manière suivante :

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} G_n e^{i\omega_n t}$$

$$G_n = \frac{1}{T}\int_0^T g(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Q15 : Déterminer les coefficients de Fourier F_n de la fonction $F_d(t)$, fonction périodique de période T, dont la valeur sur $[0;T[$ vaut $f_d(t)$.

On recherche le déplacement de la plaque sous la forme $v(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} v_n(x) e^{i\omega_n t}$.

Q16 : Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $v_n(x)$.

Q17 : Montrer que $v(x,t)$ peut s'écrire sous la forme

$$v(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_{1n} e^{-ia\sqrt{|\omega_n|}x + i\omega_n t} + C_{2n} e^{ia\sqrt{|\omega_n|}x + i\omega_n t} + C_{3n} e^{-a\sqrt{|\omega_n|}x + i\omega_n t} + C_{4n} e^{a\sqrt{|\omega_n|}x + i\omega_n t}$$

où a est une constante à déterminer.

Q18 : On ne considère que les ondes qui se propagent suivant les x positifs dans un milieu semi infini $x \in [0;\infty[$. Simplifier l'écriture de $v(x)$, en expliquant les simplifications retenues.

Les conditions aux limites sont :

$$\frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{be^3}{12}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x=0,t) = 0 \;;\; \frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{be^3}{12}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x=0,t) = F_d(t).$$

Q19 : Expliquer l'origine de chaque condition aux limites.

Q20 : Exprimer le déplacement $v(x)$ de la plaque en déterminant C_{1n} et C_{3n} pour $n \neq 0$ (le cas $n=0$ revient à ajouter une constante au déplacement et est sans intérêt pour cette étude).

Affichage du résultat

Le solveur utilisé a permis de trouver le résultat du déplacement en flexion de la plaque soumise à l'explosion. La superposition de ce résultat avec les mesures expérimentales est représentée sur la figure 15.

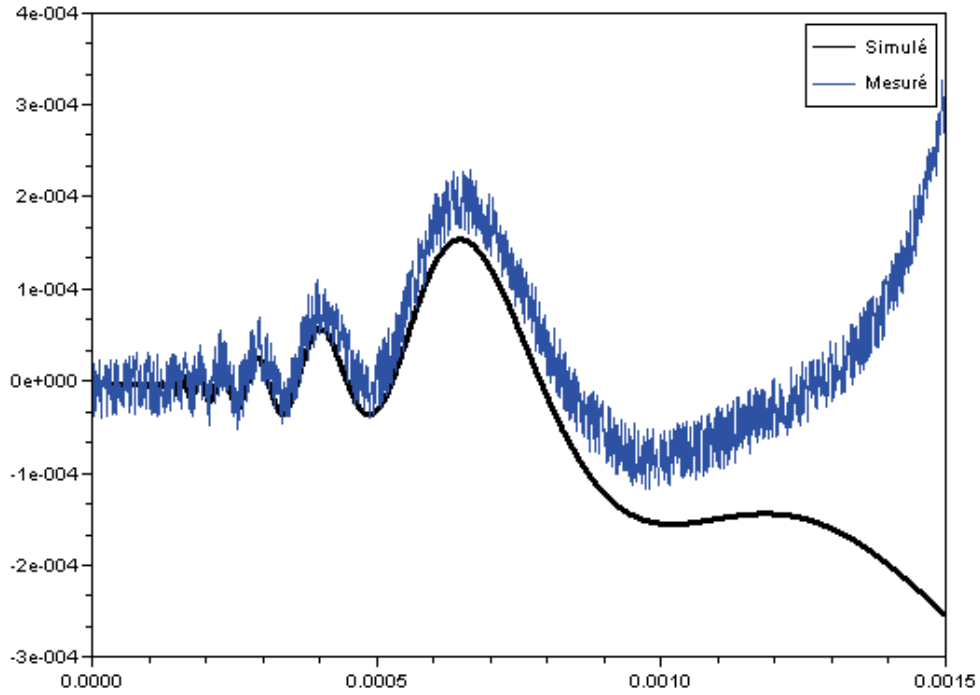


Figure 15 : comparaison du résultat issu du solveur et des mesures expérimentales à x = 0,3 m.

Q21 : Commenter l'allure générale des courbes (apparition d'oscillations rapides puis d'oscillations lentes). Commenter également l'écart entre les deux courbes.

Partie 3 : modélisation de la propagation des ondes membranaires

L'objectif de cette partie est de proposer un modèle et de simuler la propagation des ondes membranaires dans la plaque. Toutes les étapes présentes dans le domaine virtuel de simulation de la démarche de modélisation (voir figure 5), rappelées dans la figure 16, seront traitées.

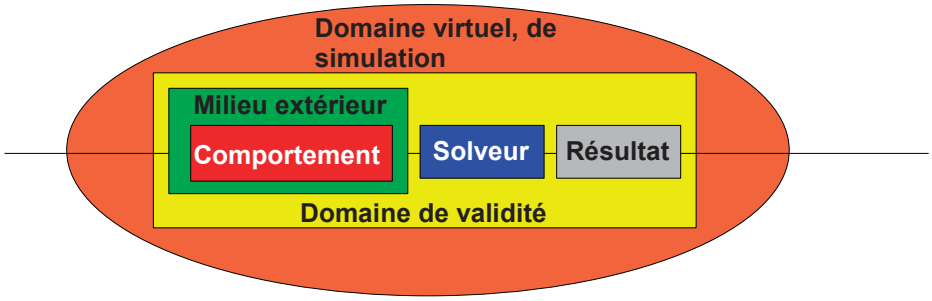


Figure 16 : étapes du domaine virtuel de la démarche de modélisation.

Pour représenter la propagation des ondes membranaires, un modèle unidimensionnel n'est pas suffisant car les deux ondes P et S ne se propagent pas dans la même direction (voir partie 1, les ondes P se propagent à la vitesse $C_P=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$, et les ondes S à la vitesse $C_S=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, λ, μ et ρ étant des paramètres matériaux donnés en annexes). Le modèle qui va être construit et le solveur qui sera utilisé seront donc 2 dimensions (2D).

Pour cette partie 3, la plaque est décrite en 2D par les variables x et y : $x\in[0,b]$, $y\in[0,L]$ (voir figure 17). On note $\Omega=[0,b]\times[0,L]$. L'épaisseur de la plaque est notée e.

Les bords de la plaque sont notés respectivement Γ_0, Γ_1, Γ_2 et Γ_3. $M(x,y)$ est le point de coordonnées x et y. $\vec{u}=u(x,y,t)\vec{x}+v(x,y,t)\vec{y}$ est le déplacement de $M(x,y)$.

La masse volumique de la plaque est notée ρ.

Les matrices seront indiquées entre crochets : $[A]=\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y})}$, avec $A_{xy}=A_{yx}$ si la matrice est symétrique.

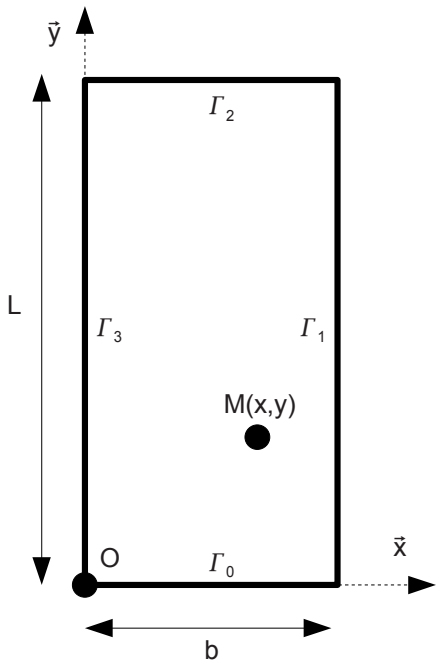


Figure 17 : géométrie de la plaque.

Modélisation du comportement membranaire de la plaque en 2D

Pour modéliser la plaque, on adopte le point de vue de la mécanique des milieux continus. Pour trouver le déplacement $\vec{u}=u(x,y,t)\vec{x}+v(x,y,t)\vec{y}$ de la plaque soumise à une densité surfacique d'effort $\vec{F}_d(x,t)=F_{dx}(x,t)\vec{x}+F_{dy}(x,t)\vec{y}$ sur Γ_0, les équations à résoudre sont les suivantes :

- équations d'équilibre intérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}=\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & \text{sur } \Omega \quad (1) \\ \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}=\rho\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} & \text{sur } \Omega \quad (2) \end{cases}$$

- conditions aux limites

$$\begin{cases} -\sigma_{xy}(x,y=0,t)=F_{dx}(x,t) \\ -\sigma_{yy}(x,y=0,t)=F_{dy}(x,t) \\ \sigma_{xx}(x=b,y,t)=\sigma_{xy}(x=b,y,t)=0 \\ \sigma_{xy}(x,y=L,t)=\sigma_{yy}(x,y=L,t)=0 \\ \sigma_{xx}(x=0,y,t)=\sigma_{xy}(x=0,y,t)=0 \end{cases} \quad (3)$$

- relation de comportement

$$[\varepsilon]=\frac{1+\nu}{E}[\sigma]-\frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}([\sigma])[I] \quad \text{sur } \Omega \quad (4)$$

avec $[\sigma]=\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y})}$ et $[\varepsilon]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y})}$

Dans l'équation (3), $F_{dx}(x,t)$ et $F_{dy}(x,t)$ sont les composantes de l'effort surfacique imposé sur Γ_0. Dans l'équation (4), Tr est la trace d'une matrice, et $[I]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est la matrice identité.
$[\sigma]$ et $[\varepsilon]$ correspondent respectivement aux contraintes et déformations engendrées par les efforts surfaciques dans la plaque.

Déterminer une solution exacte de ce groupe d'équations aux dérivées partielles est, dans la plupart des cas, impossible, vu sa complexité. Il faut donc trouver une solution approchée. Pour cela, il est nécessaire d'écrire ce système d'équations sous une autre forme.

Q22 : Montrer que $\forall u^*(x,y,t)$, $\forall v^*(x,y,t)$

$$\int_\Omega \left(\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) u^* + \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) v^* \right) dS = \int_\Omega \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u^* + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} v^* \right) dS$$

où on utilise la notation simplifiée $\int_\Omega ()\, dS = \int_{x=0}^{x=b} \int_{y=0}^{y=L} ()\, dx\, dy$.

Q23 : En utilisant des intégrations par parties, montrer que $\forall u^*$, $\forall v^*$

$$-\int_\Omega \left(\sigma_{xx} u^*_{,x} + \sigma_{yy} v^*_{,y} + \sigma_{xy} (u^*_{,y} + v^*_{,x}) \right) dS + \int_{\Gamma_0} \left(F_{dx} u^* + F_{dy} v^* \right) d\Gamma = \int_\Omega \left(\rho u_{,tt} u^* + \rho v_{,tt} v^* \right) dS$$

où on utilise les notations $u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{,y} = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u_{,tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $\int_{\Gamma_0} ()\, d\Gamma = \int_{x=0}^{x=b} ()\, dx$

Q24 : Montrer que (4) s'écrit $[\sigma] = \alpha \left([\varepsilon] + \beta \mathrm{Tr}([\varepsilon])[I] \right)$ et préciser les valeurs de α et β .

Q25 : En déduire que $\forall u^*$, $\forall v^*$

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \left(\frac{E}{1-\nu^2} (u_{,x} + \nu v_{,y}) u^*_{,x} + \frac{E}{1-\nu^2} (v_{,y} + \nu u_{,x}) v^*_{,y} + \frac{E}{2(1+\nu)} (u_{,y} + v_{,x})(u^*_{,y} + v^*_{,x}) \right) dS \\ + \int_{\Gamma_0} \left(F_{dx} u^* + F_{dy} v^* \right) d\Gamma = \int_\Omega \left(\rho u_{,tt} u^* + \rho v_{,tt} v^* \right) dS \end{aligned} \qquad (5)$$

Les questions précédentes ont permis de montrer que $\{(1),(2),(3),(4)\} \Rightarrow (5)$. On admettra la réciproque.

Utilisation d'un solveur numérique

1 – Construction d'une approximation de la solution exacte

Pour trouver une solution approchée $(\tilde{u}, \tilde{v})$ de la solution exacte (u, v) , il suffit de vérifier (5) dans un espace mathématique d'approximation $\tilde{U}$: $\forall \tilde{u}^* \in \tilde{U}$, $\forall \tilde{v}^* \in \tilde{U}$

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \left(\frac{E}{1-\nu^2} (\tilde{u}_{,x} + \nu \tilde{v}_{,y}) \tilde{u}^*_{,x} + \frac{E}{1-\nu^2} (\tilde{v}_{,y} + \nu \tilde{u}_{,x}) \tilde{v}^*_{,y} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\tilde{u}_{,y} + \tilde{v}_{,x})(\tilde{u}^*_{,y} + \tilde{v}^*_{,x}) \right) dS \\ + \int_{\Gamma_0} \left(F_{dx} \tilde{u}^* + F_{dy} \tilde{v}^* \right) d\Gamma = \int_\Omega \left(\rho \tilde{u}_{,tt} \tilde{u}^* + \rho \tilde{v}_{,tt} \tilde{v}^* \right) dS \end{aligned} \qquad (6)$$

Dans la suite, on prendra comme espace d'approximation l'espace $\tilde{U}$ de dimension n , généré par la base de fonctions d'espace $\{\varphi_i\}_{i=1..n}$. Ainsi, $\tilde{u}(x,y,t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x,y) U_i(t)$ et $\tilde{v}(x,y,t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x,y) V_i(t)$. On peut donc écrire

$$\vec{\tilde{u}}(x,y,t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x,y) U_i(t) \vec{x} + \varphi_i(x,y) V_i(t) \vec{y} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x,y) \vec{\tilde{u}}_i(t) \right)$$

Pour simplifier les écritures, on pose $\underline{\Phi}=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix}$, $\underline{U}=\begin{pmatrix}U_1\\ U_2\\ \vdots\\ U_n\end{pmatrix}$ et $\underline{V}=\begin{pmatrix}V_1\\ V_2\\ \vdots\\ V_n\end{pmatrix}$. On a donc

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}{}^t\underline{\Phi}.\underline{U}\\ {}^t\underline{\Phi}.\underline{V}\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y})} \qquad (7)$$

où ${}^t\underline{\Phi}$ correspond à la transposée du vecteur $\underline{\Phi}$.

De la même manière $$\vec{u}^*=\begin{pmatrix}{}^t\underline{\Phi}.\underline{U}^*\\ {}^t\underline{\Phi}.\underline{V}^*\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y})} \qquad (8)$$

Q26 : Montrer que ${}^t\underline{\Phi}.\underline{U}^*={}^t(\underline{U}^*).\underline{\Phi}$

Q27 : En introduisant (7) et (8) dans (6), montrer que que le problème s'écrit sous la forme suivante : trouver $\underline{U}$ et $\underline{V}$ tels que $\forall\underline{U}^*$, $\forall\underline{V}^*$

$${}^t(\underline{U}^*)\left(-[K_{uu}]\underline{U}-[K_{uv}]\underline{V}+\underline{F}_u-[M]\underline{U}_{,tt}\right)+{}^t(\underline{V}^*)\left(-[K_{vu}]\underline{U}-[K_{vv}]\underline{V}+\underline{F}_v-[M]\underline{V}_{,tt}\right)=0$$

avec

$$[M]=\int_\Omega\left(\rho\underline{\Phi}.{}^t\underline{\Phi}\right)dS$$

$$[K_{uu}]=\int_\Omega\left(\frac{E}{1-\nu^2}\underline{\Phi}_{,x}.{}^t\underline{\Phi}_{,x}+\frac{E}{2(1+\nu)}\underline{\Phi}_{,y}.{}^t\underline{\Phi}_{,y}\right)dS$$

$$[K_{vv}]=\int_\Omega\left(\frac{E}{1-\nu^2}\underline{\Phi}_{,y}.{}^t\underline{\Phi}_{,y}+\frac{E}{2(1+\nu)}\underline{\Phi}_{,x}.{}^t\underline{\Phi}_{,x}\right)dS$$

$$[K_{uv}]=\int_\Omega\left(\nu\frac{E}{1-\nu^2}\underline{\Phi}_{,x}.{}^t\underline{\Phi}_{,y}+\frac{E}{2(1+\nu)}\underline{\Phi}_{,y}{}^t\underline{\Phi}_{,x}\right)dS$$

$$[K_{vu}]=\int_\Omega\left(\nu\frac{E}{1-\nu^2}\underline{\Phi}_{,y}.{}^t\underline{\Phi}_{,x}+\frac{E}{2(1+\nu)}\underline{\Phi}_{,x}.{}^t\underline{\Phi}_{,y}\right)dS$$

$$\underline{F}_u=\int_{\Gamma_0}F_{dx}\underline{\Phi}\,d\Gamma$$

$$\underline{F}_v=\int_{\Gamma_0}F_{dy}\underline{\Phi}\,d\Gamma$$

Donner l'expression détaillée de la matrice $[M]$.

Q28 : On pose finalement $\underline{X}=\begin{pmatrix}\underline{U}\\ \underline{V}\end{pmatrix}$. Montrer qu'on aboutit à la résolution du système suivant : $[A]\underline{X}_{,tt}+[B]\underline{X}=\underline{F}$ où l'on précisera le vecteur $\underline{F}$, les matrices $[A]$ et $[B]$.

Q29 : Déterminer la dimension des matrices et vecteurs intervenant dans ce système. Montrer que les matrices $[A]$ et $[B]$ sont symétriques.

On s'intéresse maintenant au cas où la base de fonctions $\{\varphi_i\}_{i=1..n}$ est affine par morceaux, prenant appui sur un maillage. Ce cas particulier est appelé méthode des éléments finis en Sciences de l'Ingénieur. Il nécessite la construction d'un maillage (voir figure 18), dans lequel on trouve des éléments et des noeuds. Il y a autant de fonctions φ_i que de noeuds (représentant des points géométriques de coordonnées (xi,yi)). Les fonctions $\{\varphi_i\}_{i=1..n}$ sont affines sur chaque élément. Elles sont appelées **fonctions de forme**.

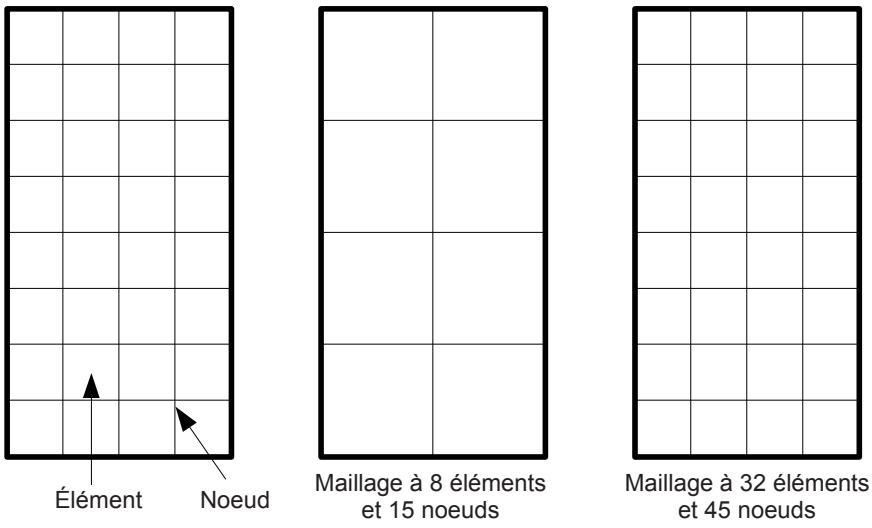


Figure 18 : exemples de maillages de la plaque.

De plus, on impose la propriété $\varphi_i(x_i, y_i)=1$ et $\varphi_i(x_j, y_j)=0$ pour $i \neq j$. Ainsi $\vec{u}_i = U_i(t)\vec{x} + V_i(t)\vec{y} = \begin{pmatrix} U_i(t) \\ V_i(t) \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y})}$ représente la valeur du déplacement approché $\vec{u}$ au noeud i de coordonnées (x_i, y_i).

Ces propriétés et le fait que les fonctions soient affines montrent que les fonctions $\varphi_i(x, y)$ ne sont non nulles que sur un nombre restreint d'éléments entourant chaque noeud i.

Le calcul des différents termes de chaque matrice ou du vecteur second membre intervenant dans le système s'effectue d'une manière identique. Pour ne pas alourdir les calculs, on s'intéresse uniquement à la détermination de la matrice $[M] = \int_\Omega \left(\rho \Phi^t \Phi\right) dS$. La composante M_{ij} de cette matrice vaut $M_{ij} = \int_\Omega \left(\rho \varphi_i \varphi_j\right) dS$ et fait intervenir les fonctions de forme des noeuds i et j.

Q30 : Déterminer la valeur des M_{ij} si les noeuds i et j ne sont pas sur un même élément.

Q31 : En utilisant le maillage défini sur la figure 19, préciser la forme de la matrice $[M]$ en indiquant par des croix les termes non nuls et en mettant des 0 pour les termes nuls.

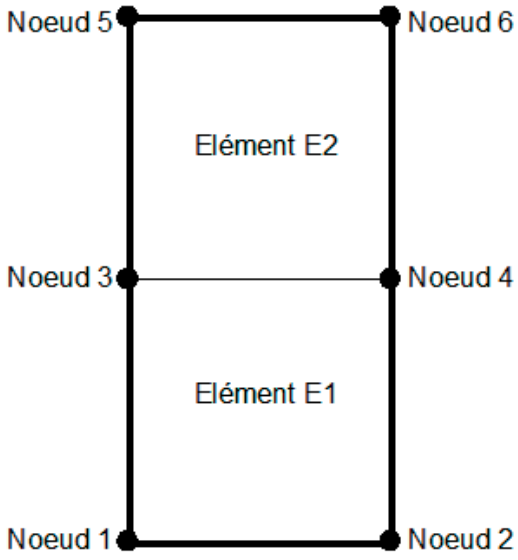


Figure 19 : maillage à 2 éléments et 6 noeuds.

Le calcul de chaque terme non nul $M_{ij}=\int_{\Omega}\left(\rho\varphi_i\varphi_j\right)dS$ peut s'écrire de la façon suivante : $M_{ij}=\int_{\Omega}\left(\rho\varphi_i\varphi_j\right)dS=\sum_{\text{Eléments en lien avec i et j}}\left(\int_{\Omega_E}\left(\rho\varphi_i\varphi_j\right)dS\right)$ où Ω_E est l'élément E (en lien avec les noeuds i et j).

On remarque donc qu'il est nécessaire d'intégrer un produit de fonctions sur chaque élément. Le calcul de ces intégrales est le même pour tous les éléments à un changement de variable prêt. Pour ne pas avoir à calculer toutes les intégrales, on construit un élément de référence pour lequel les intégrales sont entièrement déterminées. Par un changement de variables approprié, on peut ensuite obtenir les valeurs des intégrales sur chaque élément réel, quelle que soit sa position, à partir des valeurs obtenues sur l'élément de référence.

On s'intéresse donc à l'élément défini sur la figure 20 (élément de référence) dont les noeuds sont repérés par les lettres a, b, c et d. Cet élément a pour dimensions l_x et l_y. On appelle $\varphi_a(\xi,\eta)$, $\varphi_b(\xi,\eta)$, $\varphi_c(\xi,\eta)$, $\varphi_d(\xi,\eta)$ les fonctions de forme associées à chaque noeud : ce sont des fonctions affines des variables ξ (coordonnée selon $\vec{x}$) et η (coordonnée selon $\vec{y}$), donc des polynômes de degré 1 en ξ et η. Par exemple, on a $\varphi_a(\xi,\eta)=a_3\xi\eta+a_2\xi+a_1\eta+a_0$, (a_0, a_1, a_2, a_3) étant les coefficients constants du polynôme $\varphi_a(\xi,\eta)$.

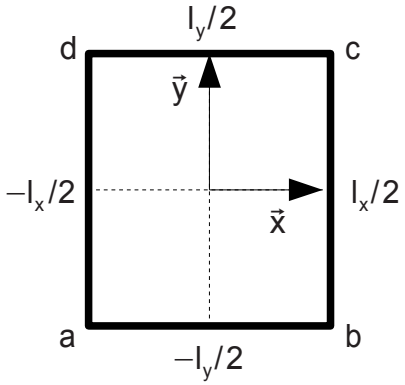


Figure 20 : élément de référence.

Q32 : Déterminer $\varphi_a(\xi,\eta)$ (donc les 4 constantes a_0, a_1, a_2 et a_3) pour que φ_a soit égale à 1 au noeud a et égale à 0 aux noeuds b, c et d. Tracer en perspective l'allure de cette fonction sur l'élément de référence en justifiant succinctement le tracé.

La matrice de masse sur l'élément de référence s'écrit de la façon suivante :

$$[M^e]=\begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} & M_{ac} & M_{ad} \\ M_{ab} & M_{bb} & M_{bc} & M_{bd} \\ M_{ac} & M_{bc} & M_{cc} & M_{cd} \\ M_{ad} & M_{bd} & M_{cd} & M_{dd} \end{bmatrix}$$

Q33 : Calculer la valeur de l'intégrale $M_{aa}=\int_{\xi=-l_x/2}^{\xi=l_x/2}\int_{\eta=-l_y/2}^{\eta=l_y/2}\varphi_a(\xi,\eta)\varphi_a(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$.

Après calcul des différents termes on obtient l'expression de la matrice $[M^e]$ suivante :

$$[M^e]=\begin{bmatrix} M_{aa} & \frac{l_x l_y}{18} & \frac{l_x l_y}{36} & \frac{l_x l_y}{18} \\ \frac{l_x l_y}{18} & M_{bb} & \frac{l_x l_y}{18} & \frac{l_x l_y}{36} \\ \frac{l_x l_y}{36} & \frac{l_x l_y}{18} & M_{cc} & \frac{l_x l_y}{18} \\ \frac{l_x l_y}{18} & \frac{l_x l_y}{36} & \frac{l_x l_y}{18} & M_{dd} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

avec $M_{aa}=M_{bb}=M_{cc}=M_{dd}$

Un changement de variable permet de passer de l'élément de référence à un élément du maillage de la plaque. On suppose que les longueurs des côtés de chaque élément réel sont l_x et $l_y=l_x$. Il est donc simplement nécessaire de déterminer la correspondance entre les noeuds de chaque élément du maillage de la figure 19 et ceux de l'élément de référence (le respect de l'ordre des noeuds permet d'utiliser directement la forme de la matrice de masse élémentaire $[M^e]$).

Q34 : Recopier sur votre copie et compléter le tableau de correspondance entre les noeuds.

	Élément E1	Élément E2
Numérotation des noeuds des éléments réels		
Noeuds de l'élément de référence	a – b – c – d	a – b – c – d

Nous disposons à présent de toutes les données nécessaires pour calculer les termes non nuls de la matrice $[M]$. Pour cela, on utilise le tableau de correspondance pour positionner la matrice $[M^e]$ dans la matrice $[M]$. Par exemple, pour l'expression de M_{33}, on peut écrire $M_{33}=\int_{\Omega} \varphi_3^2 dS=\int_{E_1} \varphi_3^2 dS+\int_{E_2} \varphi_3^2 dS=M_{dd}+M_{aa}$. On constate donc que M_{33} est obtenu par assemblage d'un terme provenant de l'élément E1 (terme d-d) et d'un terme provenant de l'élément E2 (terme a-a). Étant donné que la matrice $[M^e]$ est la même pour tous les éléments (ils ont tous la même forme et les mêmes dimensions), M_{33} est simplement obtenu en sommant deux termes de la matrice $[M^e]$ choisis en fonction de la correspondance entre les noeuds.
Les autres termes non nuls sont déterminés de la même manière.

Q35 : Donner l'expression de la matrice $[M]$ en utilisant cette technique d'assemblage et les valeurs de la matrice $[M^e]$ (relation 9).

2 - Étude de l'influence des paramètres sur la solution à un problème donné

Les différentes matrices et le second membre étant déterminés, il est possible de résoudre le système différentiel matriciel $[A]\underline{X}_{,tt}+[B]\underline{X}=\underline{F}$. On souhaite étudier l'influence des paramètres du solveur de manière à le configurer correctement pour la simulation de la découpe de la plaque.

On s'intéresse alors à la plaque rectangulaire de côté 1m x 2m soumise à un chargement sinusoïdal selon la direction $\vec{y}$ uniquement sur une petite zone du côté Γ_0. On étudie la propagation des ondes avant réflexion sur les autres bords dans la partie inférieure de cette plaque. La fréquence du chargement est f=30kHz et son amplitude est unitaire (figure 20).

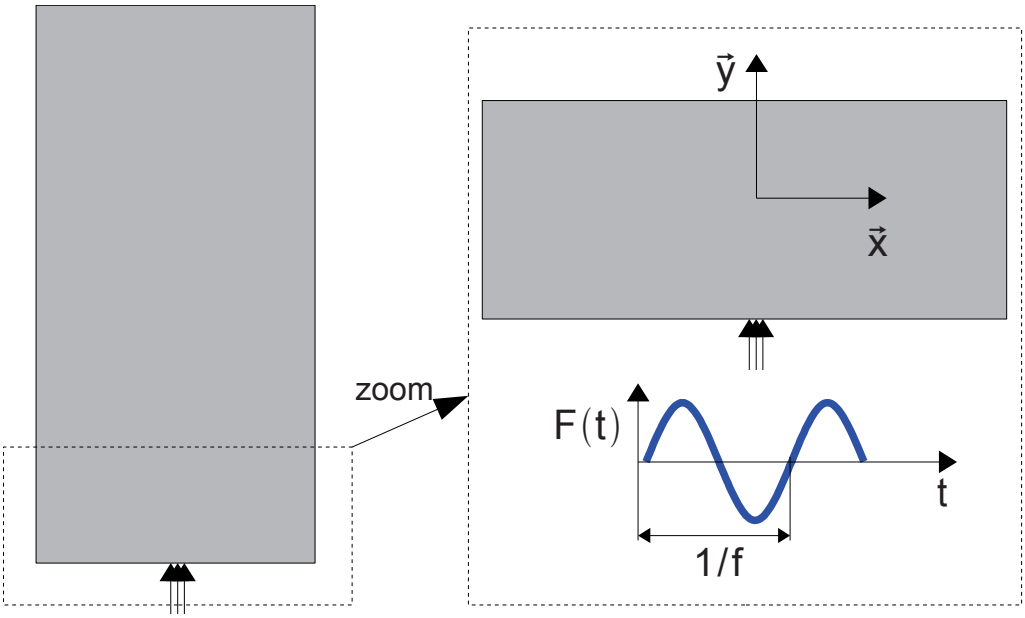


Figure 20 : cas test : plaque rectangulaire soumise à un chargement sinusoïdal.

Comme indiqué dans la partie 1, deux ondes se propagent dans ce milieu 2D : l'onde P à la vitesse C_P et l'onde S à la vitesse C_S, avec $C_P > C_S$. On note $\lambda_p = \frac{C_P}{f}$ la longueur d'onde des ondes P et $\lambda_s = \frac{C_S}{f}$ la longueur d'onde des onde S.

On étudie l'influence de la taille des éléments choisis (l_x) sur la résolution (qualité de la solution approchée, temps de résolution,...). La figure 21 montre un exemple de maillage lorsque $l_x = \frac{\lambda_s}{8}$. Les résultats représentés sur les figures 22 et 23 montrent le déplacement selon les directions $\vec{y}$ et $\vec{x}$ pour un même instant mais en modifiant la taille des éléments.

Le tableau ci-dessous indique la taille des éléments choisis pour chaque simulation et le nombre de noeuds n total dans la zone étudiée.

Nom du maillage	a	b	c	d	e
Taille des éléments	$l_x=\frac{\lambda_s}{2}$	$l_x=\frac{\lambda_s}{4}$	$l_x=\frac{\lambda_s}{8}$	$l_x=\frac{\lambda_s}{16}$	$l_x=\frac{\lambda_s}{20}$
Nombre de noeuds n	231	840	3160	12324	19110

Q36 : Donner la propriété que semble vérifier la solution éléments finis lorsque la taille des éléments tend vers zéro.

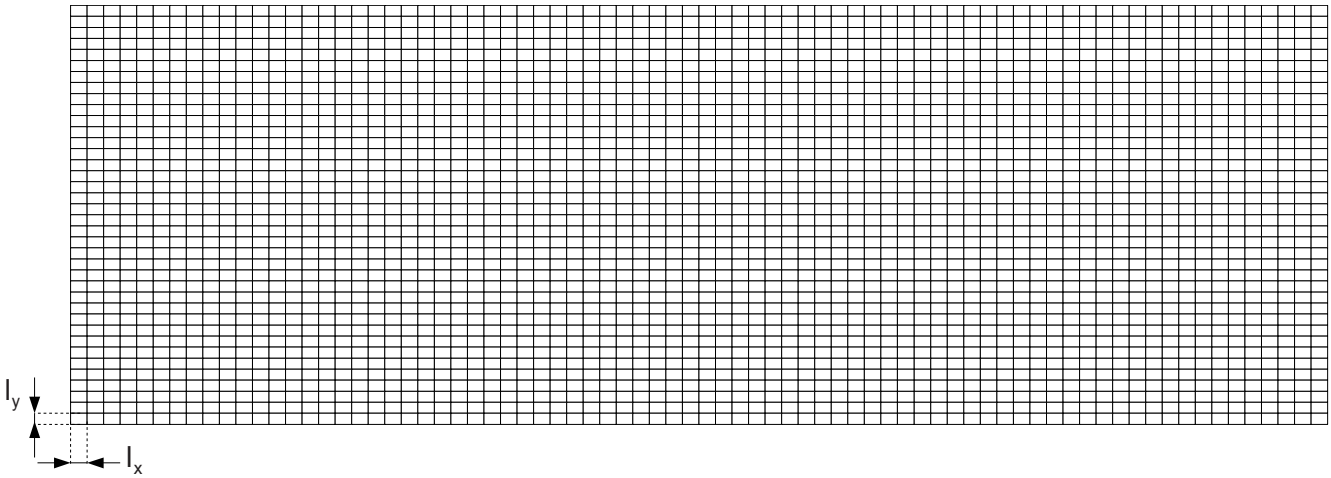


Figure 21 : exemple de maillage utilisé pour la simulation, ici pour $l_x=\frac{\lambda_s}{8}$.

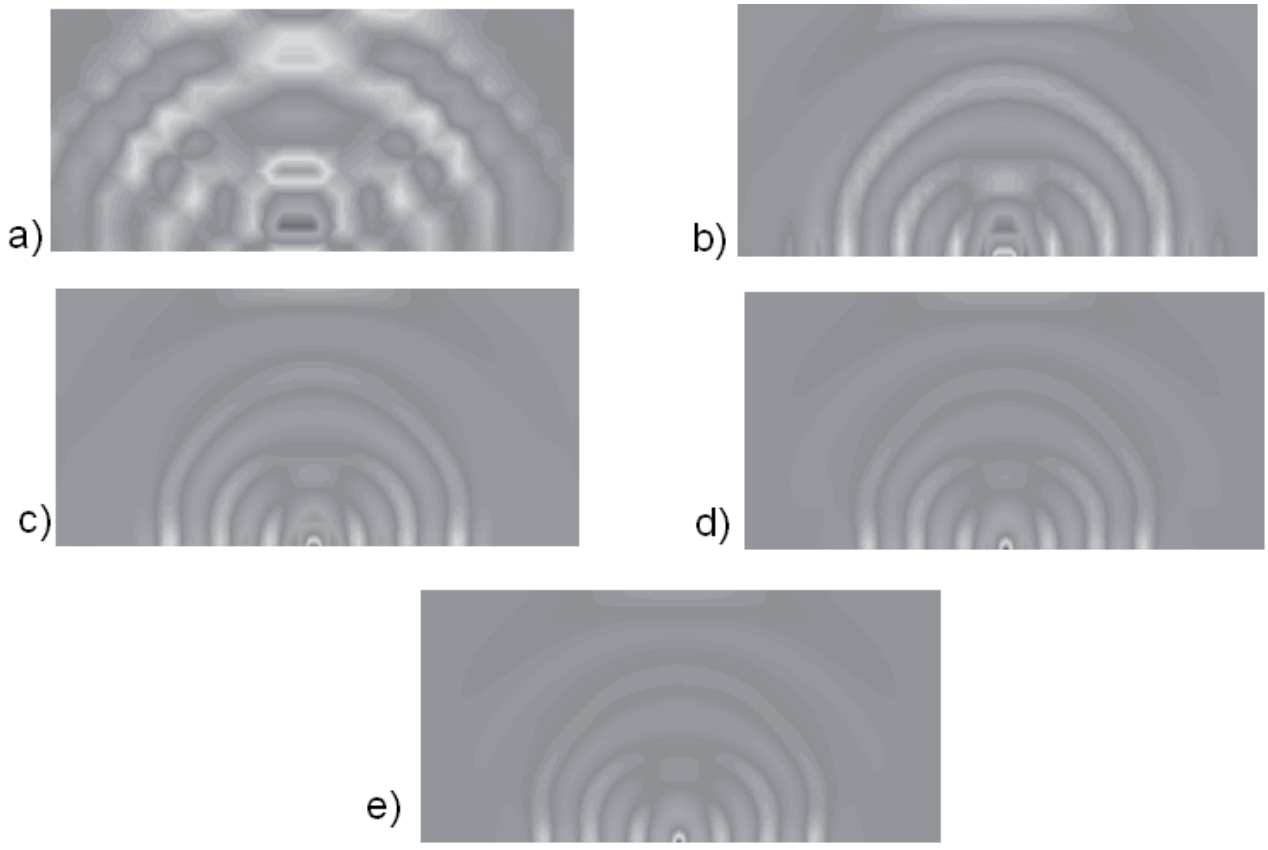


Figure 22 : déplacement selon $\vec{y}$ pour différentes tailles d'éléments.

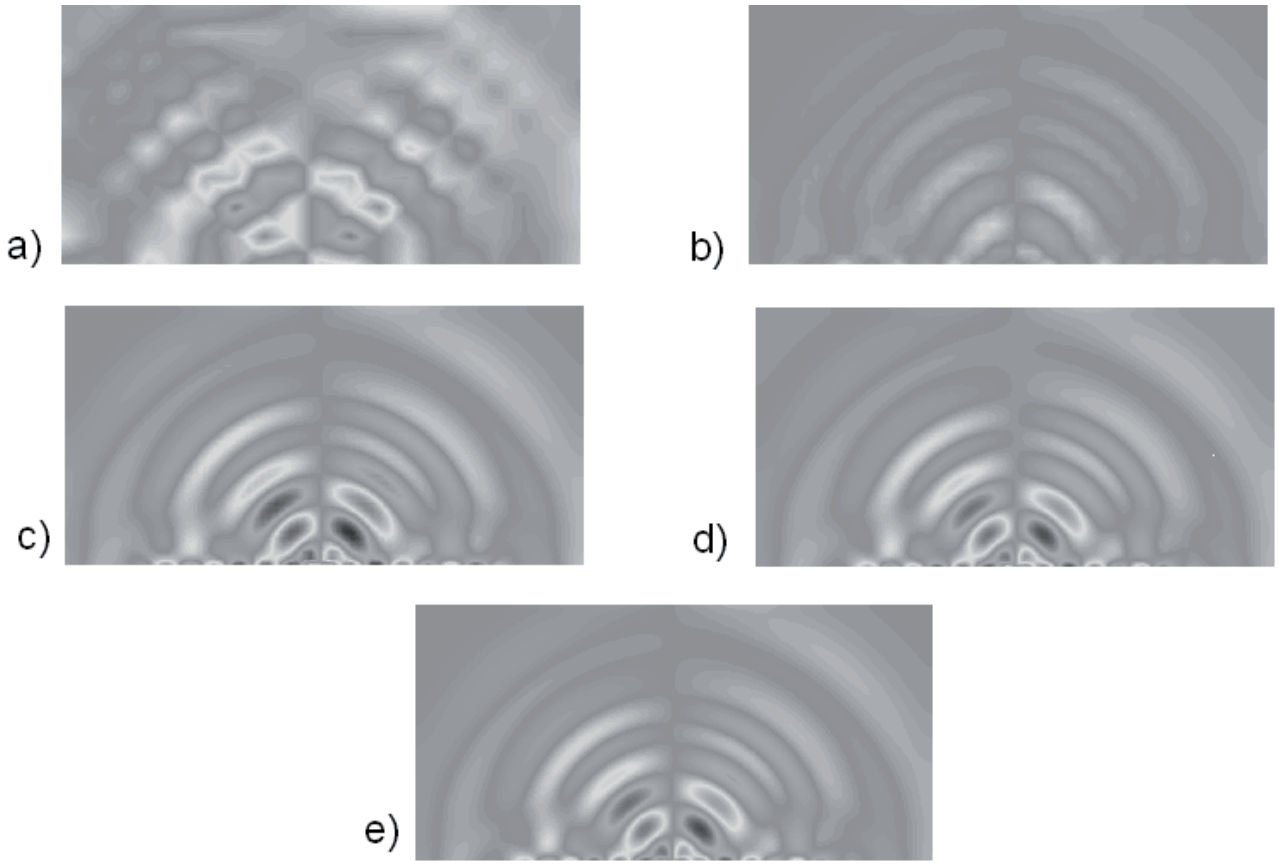


Figure 23 : déplacement selon $\vec{x}$ pour différentes tailles d'éléments.

Le choix de la taille des éléments doit être réalisé de manière astucieuse. En effet, on peut montrer que le temps de calcul est proportionnel au nombre d'inconnues (2n) élevé au carré. Le temps de calcul du cas a) est de 0.01s par simulation.

Q37 : Calculer le temps nécessaire pour les 5 cas de calculs a), b), c), d) et e), et choisir le maillage qui semble le plus pertinent pour obtenir rapidement un résultat juste.

Q38 : Compte tenu du rapport $\frac{\lambda_s}{l_x}$ pour les 5 cas de calculs, de la forme sinusoïdale des ondes se propageant dans la plaque et du caractère affine des fonctions de forme, expliquer pourquoi les calculs a) et b) ne semblent pas précis, alors que les calculs c), d) et e) semblent l'être. Ne pas hésiter à s'aider de schémas pour répondre à cette question.

Q39 : Expliquer pourquoi la taille des éléments est choisie en fonction de la longueur d'onde des ondes S et non pas en fonction de celle des ondes P.

Pour résoudre le système différentiel $[A]\underline{X}_{,tt}+[B]\underline{X}=\underline{F}$, on utilise un schéma temporel d'intégration. On introduit pour cela un pas de temps Δt, et on calcule la solution à différents pas de temps : 0, Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$... Ce pas de temps doit être choisi assez petit pour pouvoir observer les phénomènes engendrés par la sollicitation. Ainsi il doit être plus petit que les temps caractéristiques de la sollicitation (période, durée de présence de la sollicitation...).

On utilise de plus une règle supplémentaire pour le schéma temporel d'intégration qui est la suivante : $\Delta t < \frac{l_x}{c}$ où c est la célérité des ondes dans la plaque et l_x la dimension minimale d'un élément.

Q40 : Déterminer le pas de temps Δt maximal à utiliser pour la taille des éléments retenue précédemment.

Après ces différentes analyses effectuées, les paramètres du solveur utilisé (solveur élément fini) sont bien réglés pour obtenir un résultat juste. On s'intéresse maintenant à la résolution numérique du problème de découpe de la plaque. La bande de fréquence intéressante est [0,30kHz].

Q41 : Déduire des analyses précédentes la taille des éléments à utiliser pour obtenir une représentation correcte de la solution sur la plaque entière. Donner alors le nombre d'inconnues du problème (on arrondira le nombre d'éléments selon x et y à la valeur supérieure).

Q42 : Montrer enfin en quoi un pas de temps de $1{,}5.10^{-6}$s semble raisonnable pour étudier le phénomène de découpe (la découpe se fait à 7km/s et le signal triangulaire de la force de découpe, décrite sur la figure 24, est défini pour $T_0 = 1{,}5.10^{-5}$s).

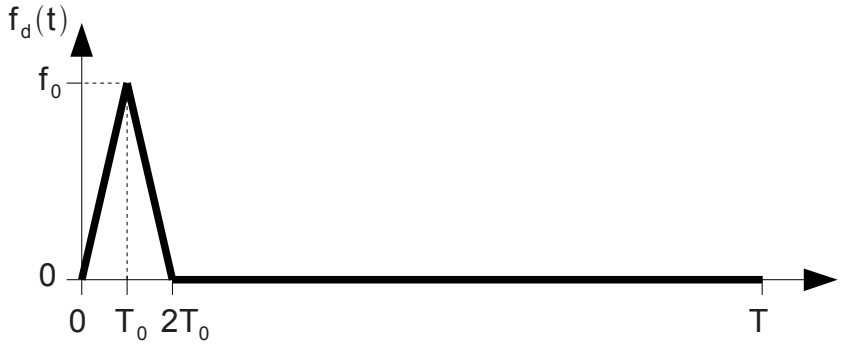


Figure 24 : modélisation adoptée pour la force créée par l'explosion du cordon pyrotechnique.

Conclusion : Le solveur ainsi paramétré permet d'obtenir des résultats numériques pertinents qui peuvent être comparés aux essais expérimentaux.

Annexes : notations utilisées et paramètres géométriques et matériaux de la plaque étudiée

i	Nombre purement imaginaire $\left(i^2=-1\right)$
ω	Pulsation
$e=6$ mm	Epaisseur de la plaque
$b=1$ m	Largeur de la plaque
$L=2$m	Longueur de la plaque
$E=70$ GPa	Paramètre matériau de la plaque, appelé module d'Young
$\nu=0{,}28$	Paramètre matériau de la plaque, appelé coefficient de Poisson
$\lambda=\frac{\nu E}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\ \nu\right)}$	Paramètre matériau de la plaque
$\mu=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}$	Paramètre matériau de la plaque
$\rho=2800$ kg.m^{-3}	Masse volumique de la plaque
k	Vecteur d'onde

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Ingénierie système : besoin, exigences et diagrammes SysML
- Propagation d'un signal
- Trigonométrie et signaux sinusoïdaux
- Dynamique des systèmes de solides : principe fondamental, stratégie d'isolement, équilibrage
- Notation complexe, régime sinusoïdal forcé et fonctions de transfert
- Suites et séries de fonctions
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Compléments d'algèbre linéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/x-ens/psi