Concours d'admission de l'École polytechnique et des ENS (X-ENS), France

Session 2009, filière PSI

Mathématiques

Ce que traite le sujet

- Première partie : spectre d'une somme et caractérisation minimax
- Deuxième partie : image numérique d'une matrice
- Troisième partie : disques de Gershgorin et enveloppes convexes
- Quatrième partie : rayon spectral, rayon numérique et normes matricielles

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie recomposée du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/x-ens/psi/2009/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

X-ENS PSI - 2009
Calculatrices autorisées

Préambule

Dans tout le texte, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes, m colonnes et à coefficients complexes ; on notera I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le spectre $\mathrm{Sp}(A)$ de A est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ constitué des valeurs propres de A. Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, on notera $A^* = {}^t\overline{A} = (\overline{a_{i,j}})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ le conjugué de la transposée de A. On identifiera les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ avec les éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On utilisera la notation $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ pour désigner la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux sont les λ_i.
L'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est muni du produit scalaire hermitien

$$(x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mapsto \langle x|y\rangle = x^* y \in \mathbb{C}$$

et pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{C}^n$, on note $F^\perp$ l'orthogonal de F dont on rappelle qu'il est de dimension

$$\dim(F^\perp) = n - \dim(F)$$

Etant donnés des vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ de $\mathbb{C}^n$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ qu'ils engendrent sera noté $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$. Dans le problème, nous aurons besoin du vocabulaire suivant : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite

- *hermitienne* si $A^* = A$;
- *anti-hermitienne* si $A^* = -A$;
- *unitaire* si $AA^* = I_n$.

Aucune connaissance spécifique sur ces matrices n'est requise à l'exception du théorème de réduction suivant que l'on admet ; quand son invocation sera nécessaire pour répondre à la question posée, nous le signalerons systématiquement dans le texte.

Théorème T.

- *Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. Il existe une matrice unitaire U telle que U^*HU est diagonale réelle.*
- *Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice anti-hermitienne. Il existe une matrice unitaire U telle que U^*HU est diagonale imaginaire pure.*

Pour X et Y des parties de $\mathbb{C}$, $X + Y$ désigne la partie de $\mathbb{C}$ dont les éléments sont ceux qui peuvent s'écrire sous la forme $x + y$ avec $x \in X$ et $y \in Y$:

$$X + Y = \{x + y \in C/\ x \in CX \ \text{ et } \ y \in Y\}$$

De même, $XY = \{xy \in C/\ x \in X \text{ et } y \in Y\}$. On notera enfin

$$P = \{z \in \mathbb{C}/\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$$

où $\mathrm{Re}(z)$ (resp. $\mathrm{Im}(z)$) désigne la partie réelle (resp. imaginaire) du nombre complexe z.

Première partie.

1. Pour tout nombre réel α, on définit les matrices

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ \alpha(1-\alpha) - 1 & \alpha \end{pmatrix} \ \text{ et } \ B(\alpha) = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 \\ -\alpha(1+\alpha) - 1 & -\alpha \end{pmatrix}$$

Calculer $\mathrm{Sp}(A(\alpha))$, $\mathrm{Sp}(B(\alpha))$ et $\mathrm{Sp}(A(\alpha) + B(\alpha))$.

2. En vous aidant des matrices $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$, justifiez le fait que l'on ne peut pas en général borner $\mathrm{Sp}(A+B)$ en fonction seulement de $\mathrm{Sp}(A)$ et $\mathrm{Sp}(B)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne ; *d'après le théorème T*, A est diagonalisable dans une base orthonormée $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note λ_i la valeur propre associée à v_i et on suppose que celles-ci sont ordonnées par ordre croissant, c'est à dire

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{C}^n$.

3.a) Montrez que pour tout $F \in \mathcal{E}_k$, la dimension de $F \cap \mathrm{Vect}(v_k, \ldots, v_n)$ est supérieure ou égale à 1.

3.b) Pour $F \in \mathcal{E}_k$, montrez qu'il existe un vecteur non nul $x \in F$ tel que $\frac{x^*Ax}{x^*x} \geq \lambda_k$.

3.c) Donnez un sous-espace vectoriel F appartenant à $\mathcal{E}_k$ tel que $\max\limits_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_k$.

3.d) Déduisez de ce qui précède que pour tout $1 \leq k \leq n$, on a

$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{E}_k} \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^*Ax}{x^*x}$$

3.e) Soeint A, B des matrices hermitiennes de valeurs propres respectives

$$\lambda_1(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A), \ \lambda_1(B) \leq \cdots \leq \lambda_n(B)$$

On classe de même les valeurs propres $\lambda_1(A+B) \leq \cdots \leq \lambda_n(A+B)$ de $A+B$. Montrez que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on a

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B)$$

Deuxième partie.

4. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathcal{V}(A)$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par

$$\mathcal{V}(A) = \left\{ \frac{x^*Ax}{x^*x} \in \mathbb{C} / \ x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$$

4.a) Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrez que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,i} \in \mathcal{V}(a)$.

4.b) On note $H(A) = \frac{A+A^*}{2}$. Montrez que $\mathcal{V}(H(A)) = \mathrm{Re}(\mathcal{V}(A))$.

4.c) Montrez que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\mathcal{V}(A+B) \subset \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B)$.

4.d) Montrez que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathcal{V}(A)$.

4.e) Montrez que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\mathrm{Sp}(A+B) \subset \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B)$.

4.f) Montrez que pour $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ des nombres réels,

$$\mathcal{V}(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = [\lambda_1, \lambda_n]$$

4.g) Montrez que si U est unitaire alors $\mathcal{V}(U^*AU) = \mathcal{V}(A)$.

4.h) *En utilisant le théorème T*, déterminez $\mathcal{V}(A)$ dans le cas où A est une matrice hermitienne.

4.i) Montrez que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{V}(A)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

5. On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que A^m est la matrice nulle.

5.a) Montrez, en utilisant par exemple le théorème de Cayley-Hamilton, que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

5.b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathcal{V}(A) = \{0\}$.

i) Montrez que A est nilpotente.

ii) Montrer que $\mathrm{Ker}\ A = (\mathrm{Im}\ A)^\perp$.

iii) Déduisez des questions précédentes que A est la matrice nulle.

Troisième partie.

6. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note

$$L_i(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|, \ C_i(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{j,i}|$$

6.a) On suppose que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $|a_{i,i}| > L_i(A)$. Montrez que A est inversible.
6.b) déduisez de la question précédente que $\mathrm{Sp}(A) \subset G(A) \cap G({}^tA)$ où

$$G(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} / \ |z - a_{i,i}| \leq L_i(A)\}$$

7. Un sous-ensemble X de $\mathbb{C}$ est dit *convexe* s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x_1, x_2) \in X \times X, \ \forall t \in [0,1], \ tx_1 + (1-t)x_2 \in X$$

7.a) Montrez que l'intersection d'une famille quelconque de sous-ensembles convexes de $\mathbb{C}$ est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{C}$.
7.b) Montrer que pour toute partie X de $\mathbb{C}$, il existe un plus petit ensemble convexe contenant X : on le note $\mathrm{Conv}(X)$ et on l'appelle l'*enveloppe convexe* de X.
7.c) Montrez que $\mathrm{Conv}(X)$ est égal à l'ensemble :

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i / \ n \geq 1, \ \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X, \ \forall i, \ t_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}$$

7.d) Soit K un convexe fermé de $\mathbb{C}$ qui ne contient pas 0. Montrez qu'il existe un unique $z_0 \in K$ tel que $|z_0| = \min_{z \in K} |z|$.
7.e) Construisez une droite du plan complexe d'équation $f(z) = 0$ de la forme $f(z) = a\mathrm{Re}(z) + b\mathrm{Im}(z) + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et telle que $c < 0$ et $f(z) > 0$ pour tout $z \in K$.
7.f) Montrez qu'un convexe fermé K de $\mathbb{C}$ ne contient pas 0 si et seulement s'il existe un réel θ tel que $e^{i\theta}K$ soit contenu dans P.

8. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $E_i(A) = \frac{L_i(A) + C_i(A)}{2}$ ainsi que

$$G_{\mathcal{V}}(A) = \mathrm{Conv}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} / \ |z - a_{i,i}| \leq E_i(A)\} \right)$$

dont *on admet* qu'il est fermé.
8.a) Montrez que $0 \notin G_{\mathcal{V}}(A)$, si et seulement s'il existe un réel θ tel que $G_{\mathcal{V}}(e^{i\theta}A) \subset P$.
8.b) Montrez que $G_{\mathcal{V}}(A) \subset P$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\mathrm{Re}(a_{i,i}) > E_i(A)$.
8.c) On suppose que $G_{\mathcal{V}} \subset P$ et on rappelle que $H(A)$ désigne la matrice hermitienne $\frac{A + A^*}{2}$. En remarquant que $L_i(H(A)) \leq E_i(A)$, montrez que $\mathrm{Sp}(H(A)) \subset P$ et déduisez-en que $\mathcal{V}(A) \subset P$.
8.d) Montrez que $0 \notin G_{\mathcal{V}}(A)$ implique $0 \notin \mathcal{V}(A)$.
8.e) Déduisez de ce qui précède que $\mathcal{V}(A) \subset G_{\mathcal{V}}(A)$.

Quatrième partie.

Le *rayon spectral* d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est défini par

$$\rho(A) = \max\{|z| / \ z \in \mathrm{Sp}(A)\}$$

D'après la compacité de $\mathcal{V}(A)$ prouvée à la question 4.*i*), on définit le *rayon numérique* de A par

$$r(A) = \max\{|z| / \ z \in \mathcal{V}(A)\}$$

Etant donnée une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{C}^n$, la norme $|||.|||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à $\|.\|$ sur $\mathbb{C}^n$ est définie par la formule suivante :

$$|||A||| = \sup_{x\in\mathbb{C}^n, \|x\|=1} \|Ax\|$$

Pour $x \in \mathbb{C}^n$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$, on notera x_i sa i-ième coordonnée.

9. Une norme matricielle $|||.|||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est par définition une norme telle que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $|||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||$.
   9.a) Montrez qu'une norme subordonnée est une norme matricielle.
   9.b) On note $|||.|||_2$ la norme subordonnée à la norme $\|.\|_2$ définie par $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$. En utilisant le *théorème T*, montrez que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $|||A|||_2$ est égale à la racine carrée positive de la plus grande des valeurs propres de A^*A.
   9.c) On *admet* que les norme $|||.|||_1$ et $|||.|||_\infty$ subordonnées respectivement aux normes $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ sont données par les formules

$$|||A|||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|, \;\; |||A|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

   i) Montrez que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\rho(A) \leq r(A)$.
   ii) Montrez, en utilisant 8.*e*), que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$r(A) \leq \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (|a_{i,j}| + |a_{j,i}|)$$

   iii) Déduisez des questions précédentes que $\rho(A) \leq r(A) \leq \frac{|||A|||_1 + |||A|||_\infty}{2}$.
10. On note désormais $r \;:\; \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^+$ la fonction qui à A associe $r(A)$.
   10.a) Montrez que r est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   10.b) Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathcal{V}(A),\ \mathcal{V}(B),\ \mathcal{V}(A)\mathcal{V}(B)$ et $\mathcal{V}(AB)$. La norme définie par r est-elle matricielle ?
   10.c) Montrez que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $r(A) \leq |||A|||_2$; en utilisant le *théorème T* montrez que l'on a égalité si A est hermitienne ou anti-hermitienne.
   10.d) En écrivant $A = \frac{A+A^*}{2} + \frac{A-A^*}{2}$, montrez que $|||A|||_2 \leq 2r(A)$.
   10.e) Déduisez de ce qui précède que $4r$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   10.f) Montrez que pour c réel strictement positif, cr est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $c \geq 4$.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Compléments d'algèbre linéaire
- Espaces vectoriels normés

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/x-ens/psi