Concours d'admission de l'École polytechnique et des ENS (X-ENS), France

Session 2009, filière PSI

Sciences de l'ingénieur

Durée : 5 heures

Ce que traite le sujet

- Présentation, architecture et grafcet de commande
- Partie 1 : pertinence de l'amortissement actif des vibrations
- Partie 2 : validation du critère de filtrage des vibrations hautes fréquences
- Partie 3 : validation du critère de résonance
- Partie 4 : amélioration des performances

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/x-ens/psi/2009/si

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CX9614 **Banque commune Ecole Polytechnique – ENS de Cachan**

PSI

Session 2009

Épreuve de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

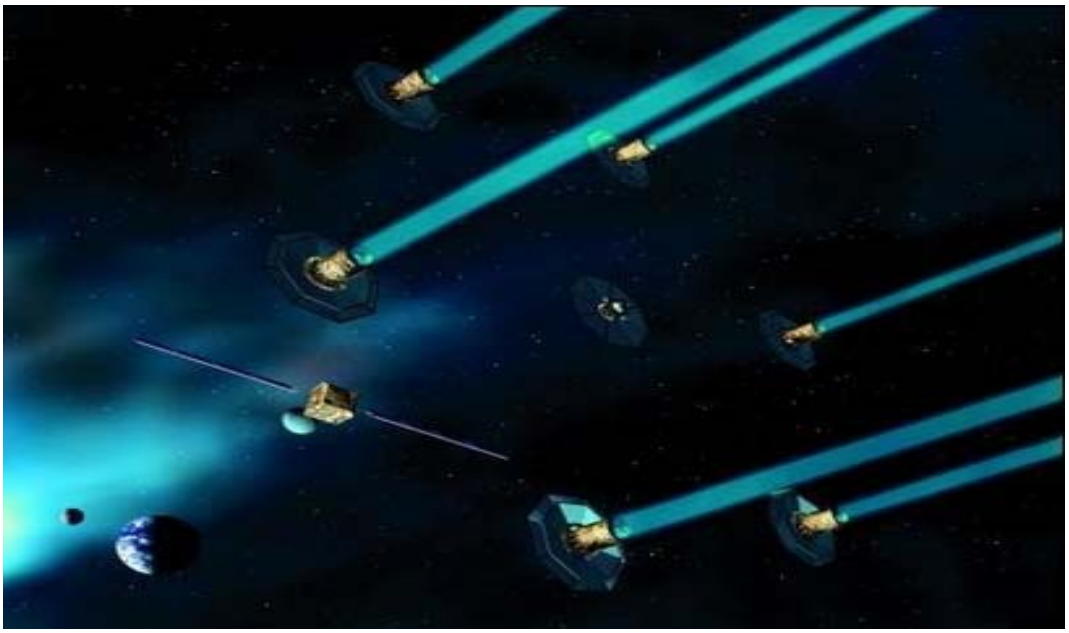
Durée : **5 heures**

Aucun document n'est autorisé

L'usage de calculatrice électronique de poche à alimentation autonome, non imprimante et sans document d'accompagnement, est autorisé selon la circulaire n°99018 du 1er février 1999. De plus, une seule calculatrice est admise sur la table et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Station spatiale d'observation par interférométrie



Le sujet est composé :

- de ce livret décrivant le système étudié ainsi que le travail demandé ;
- d'un document réponse à joindre à la copie.

Il est recommandé au candidat :

- de lire l'intégralité du sujet avant de commencer à composer ;
- de rappeler, sur sa copie, le numéro de la question avant d'en développer la réponse ;
- de respecter l'ensemble des notations alphabétiques et numériques du sujet ;
- de préciser ses propres notations lorsque cela s'avère nécessaire ;
- de justifier ses hypothèses et de rédiger clairement ses réponses.

Les quatre parties de ce sujet sont relativement indépendantes. Néanmoins il est recommandé de les traiter dans l'ordre proposé pour tenir compte des différentes remarques et des notations.

En astronomie, de nos jours, de nombreuses missions sont en cours pour découvrir l'existence de planètes dans les systèmes extra-solaires. Actuellement, les scientifiques en ont déjà découvert plus de 200 dont la masse est à peu près 5 fois supérieure à celle de la Terre, mais ils estiment que des planètes de caractéristiques identiques à celles de la Terre existent. L'Agence Spatiale Européenne (ESA) a donc lancé un projet de recherche, baptisé « Darwin », dont l'objectif est de rechercher les planètes identiques à la Terre, et d'en étudier la composition. Pour atteindre cet objectif, l'ESA doit disposer d'un système lui permettant d'exploiter les informations contenues dans les signaux lumineux qu'émettent les étoiles (figure 2), de manière plus approfondie que ne le peuvent les télescopes actuels (figure 3).

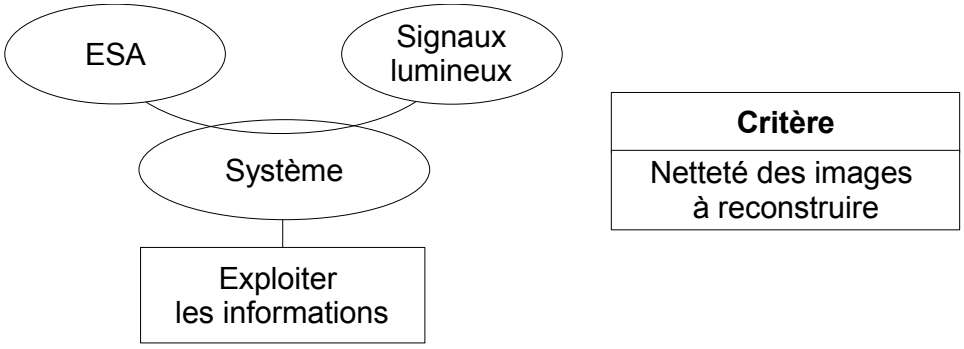


Figure 2 : besoin à satisfaire.

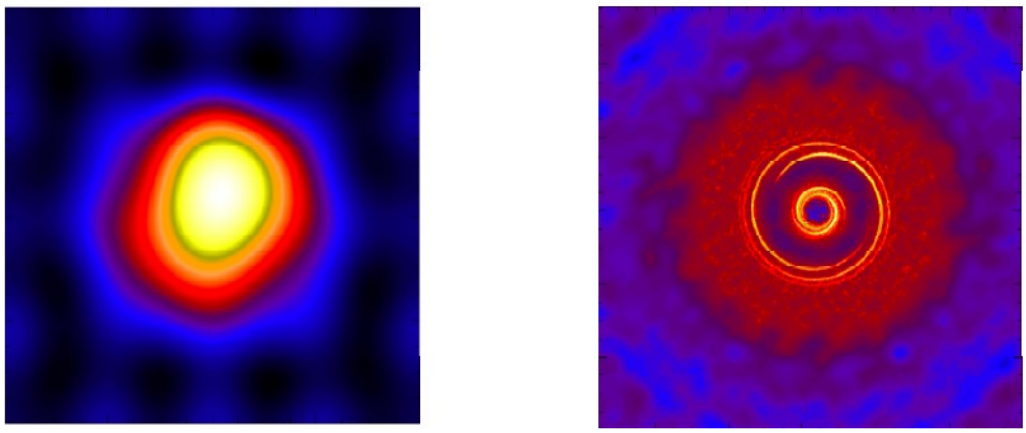


Figure 3 : exemple d'exploitation plus approfondie des informations d'un même signal lumineux, entre un télescope classique (gauche) et le système souhaité par l'ESA (droite).

Pour satisfaire ce besoin, la solution technique retenue par l'ESA est un télescope "géant", de 500 m de périmètre. Or, actuellement, la fabrication d'un télescope de cette taille est irréalisable (le télescope Hubble qui déchiffre les images de l'univers a un périmètre de 13 m). L'ESA mise donc sur une nouvelle technologie de station spatiale d'observation, basée sur l'interférométrie (figure 4). Ce nouveau type de station spatiale d'observation possède 6 télescopes qui captent les ondes lumineuses venues de l'espace et les font interférer afin d'en exploiter les informations. L'interférométrie permet d'éliminer les signaux parasites et donc d'obtenir des informations de plus grandes précisions.

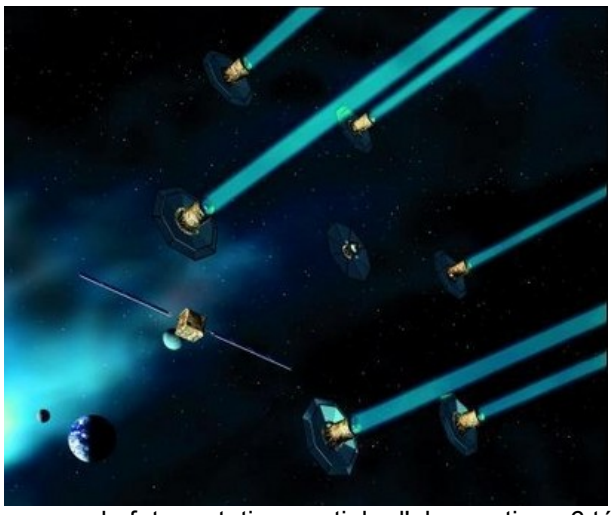


Figure 4 : architecture retenue pour la future station spatiale d'observation : 6 télescopes captent les ondes lumineuses, et les font interférer, de manière à éliminer les parasites des signaux lumineux.

La figure 5 précise la position relative des télescopes entre eux, retenue par l'ESA, pour fabriquer le télescope "géant". La surface du télescope équivalent à la station spatiale est un cercle s'appuyant sur la position des 6 télescopes.

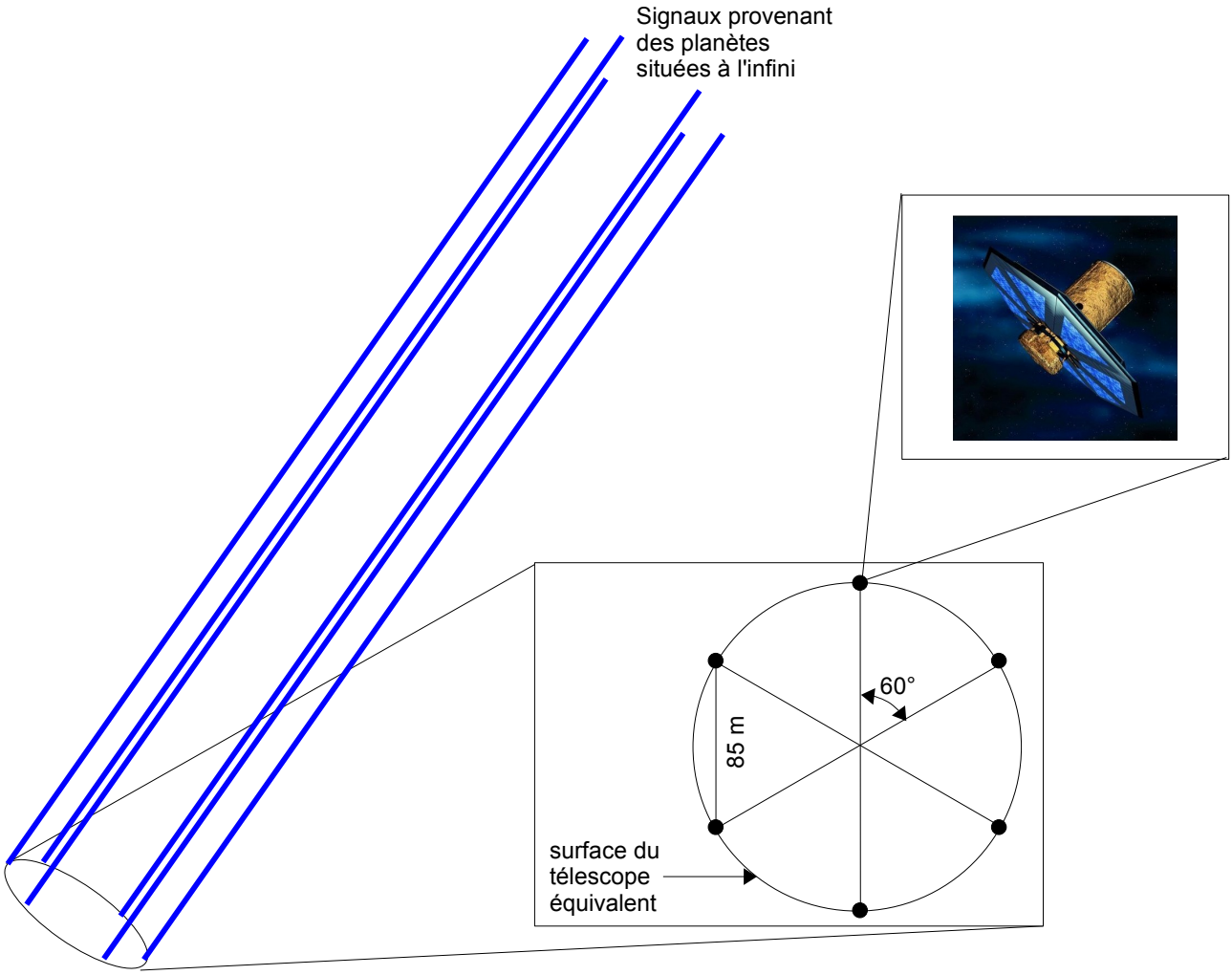


Figure 5 : définition de la surface du télescope équivalent.

Q1 : Vérifier que la station spatiale d'observation permet d'atteindre le périmètre du télescope "géant" voulu par l'ESA.

Pour sélectionner les signaux lumineux, et faire en sorte que leur interférométrie puisse se réaliser correctement, il est indispensable que les 6 télescopes puissent être orientés, et ne bougent pas les uns par rapport aux autres. Une des solutions retenues par l'ESA est de les relier par un assemblage de poutres, et de les positionner sur des plates formes 6 axes de type Stewart (figure 6). Le diagramme partiel des interacteurs d'une plate forme 6 axes est représenté sur la figure 7.

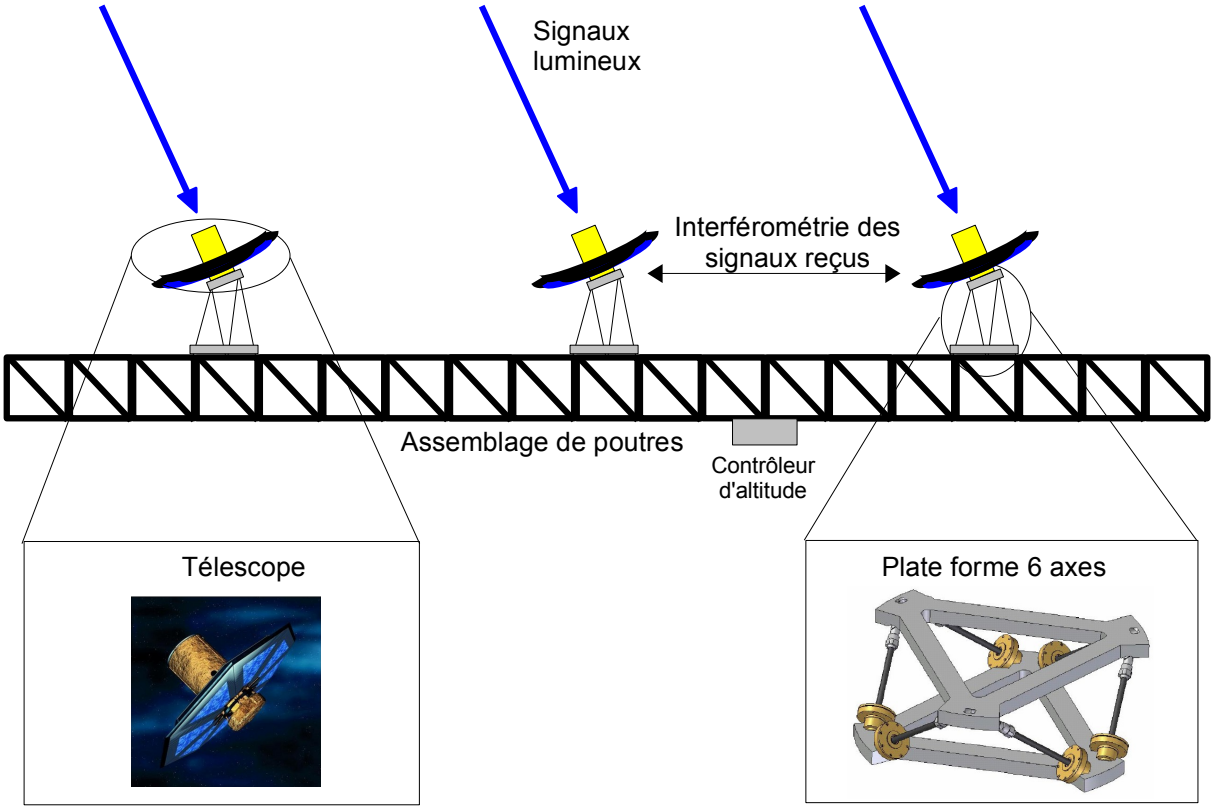
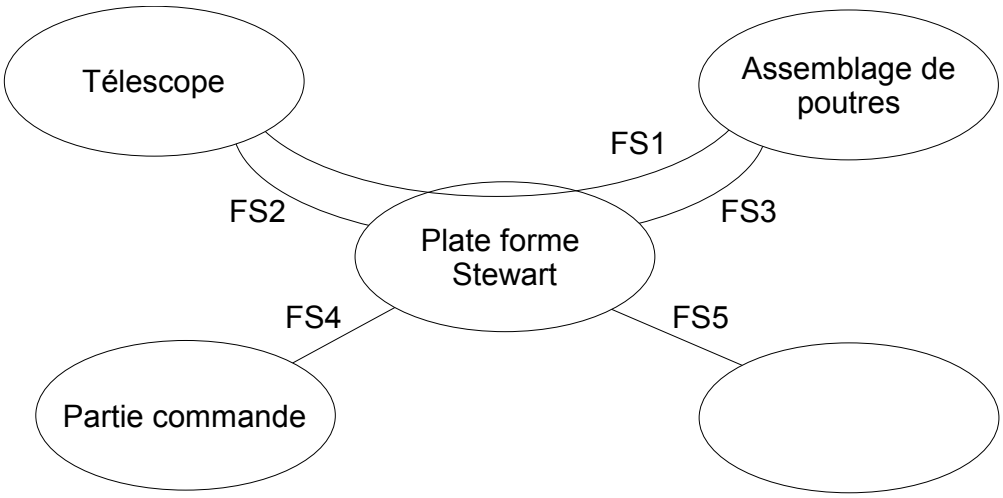


Figure 6 : une des solutions retenues par l'ESA pour que les télescopes puissent être orientés, mais ne bougent pas les uns par rapport aux autres.

Q2 : Exprimer la fonction FS3 et déterminer l'élément du milieu extérieur manquant dans la figure 7.

La structure de la plate forme 6 axes est illustrée sur la figure 8. Elle est constituée d'une embase supérieure (supportant le satellite), d'une embase inférieure (encastrée sur l'assemblage de poutres) et de 6 bras. Le contact de chaque bras avec l'embase supérieure et l'embase inférieure est modélisé par une liaison rotule. Les longueurs des 6 bras sont variables (réglée chacune par un actionneur linéaire de type électro-aimant), indépendamment les unes des autres, ce qui permet de positionner l'embase supérieure (et donc le télescope) par rapport à l'embase inférieure (et donc l'assemblage de poutres) selon les 6 degrés de liberté de l'espace.



Fonctions	Critères	Niveaux
FS1 : permettre à l'assemblage de poutres de positionner le télescope	Précision de l'angle d'orientation	Parfaite aux basses fréquences
	Résonance	Pas de résonance
		Pulsation de cassure $\omega_c = 2\pi \times 5\,\text{Hz}$
	Filtrage des vibrations hautes fréquences	Décroissance de 40 dB/décade
FS2 : s'adapter au télescope	...	...
FS4 : recevoir les ordres de positionnement de la partie commande	...	...
FS5 : s'adapter à l'énergie	...	...

Figure 7 : diagramme partiel des interacteurs pour une plate forme 6 axes (phase de vie : station spatiale d'observation déployée et en fonctionnement nominal d'observation).

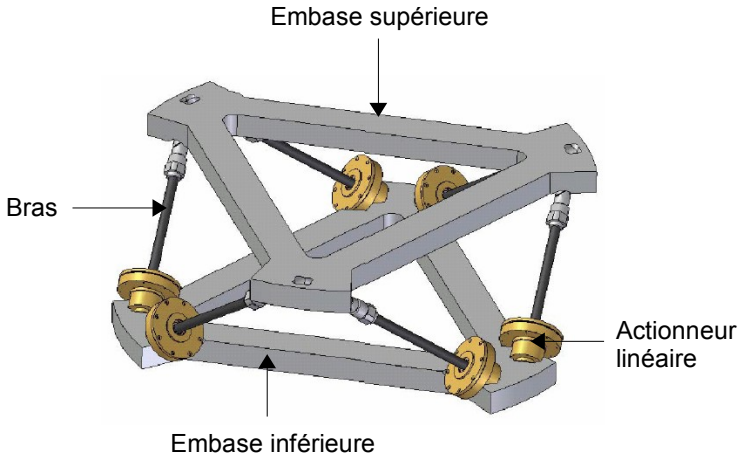


Figure 8 : structure de la plate forme 6 axes.

Q3 : Expliquer le fonctionnement d'un actionneur linéaire de type électro-aimant.

Les 6 bras sont pilotés par une même partie commande. Le Grafcet de commande est représenté dans les documents réponses 1 et 2.

Q4 : Compléter le document réponse 1 en indiquant, à la place des "?", les réceptivités associées qui permettent au Grafcet d'être opérationnel.

Pour allonger ou raccourcir la longueur des bras, la partie commande compare la longueur q_i du bras n°i à la longueur q_{iC} souhaitée.

Q5 : Compléter le document réponse 2 en indiquant, à la place des "?", les réceptivités qui permettent à la macro étape M1 d'être opérationnelle.

La caractérisation des niveaux des critères de la fonction FS1 du diagramme des interacteurs est représentée, sous forme de graphique, sur la figure 9.

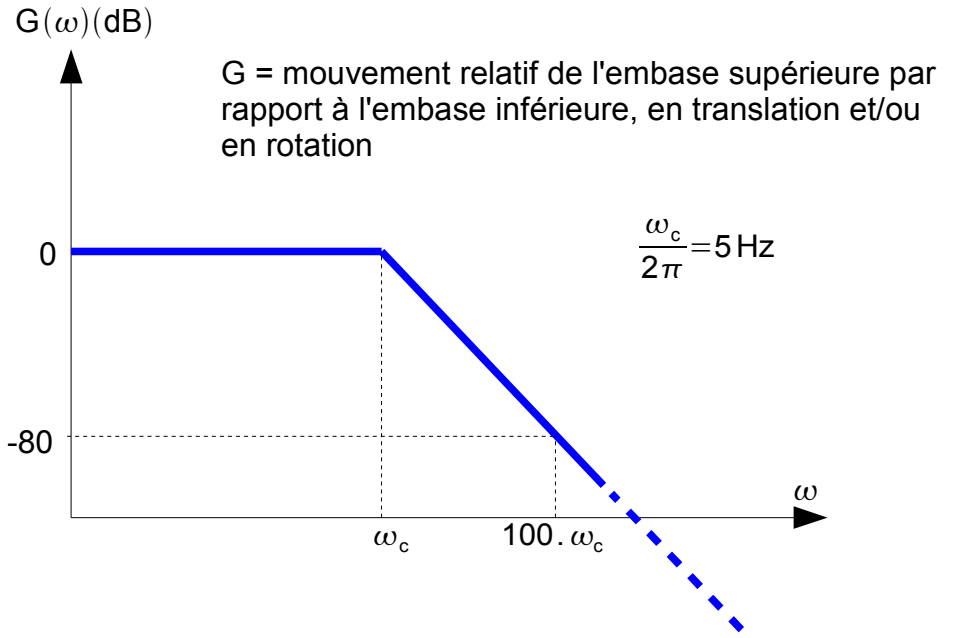


Figure 9 : caractérisation des niveaux des critères de la fonction FS1.

Q6 : Expliquer en quoi le diagramme de Bode de la figure 9 est cohérent avec les critères souhaités de la fonction FS1.

L'objectif de cette étude est la validation de la capacité de la plate forme 6 axes à satisfaire le niveau des critères de la fonction FS1, représenté sur la figure 9.

Partie 1 : pertinence de l'amortissement actif des vibrations

Le mouvement de l'embase inférieure de la plate forme est constitué d'un signal basse fréquence (correspondant au réglage de l'orientation souhaitée du téléscope) et d'un signal haute fréquence (correspondant aux bruits parasites). Comme expliqué sur la figure 9, afin de satisfaire le besoin, il faut filtrer le signal haute fréquence, qui perturbe l'interférométrie entre les télescopes (voir figure 10).

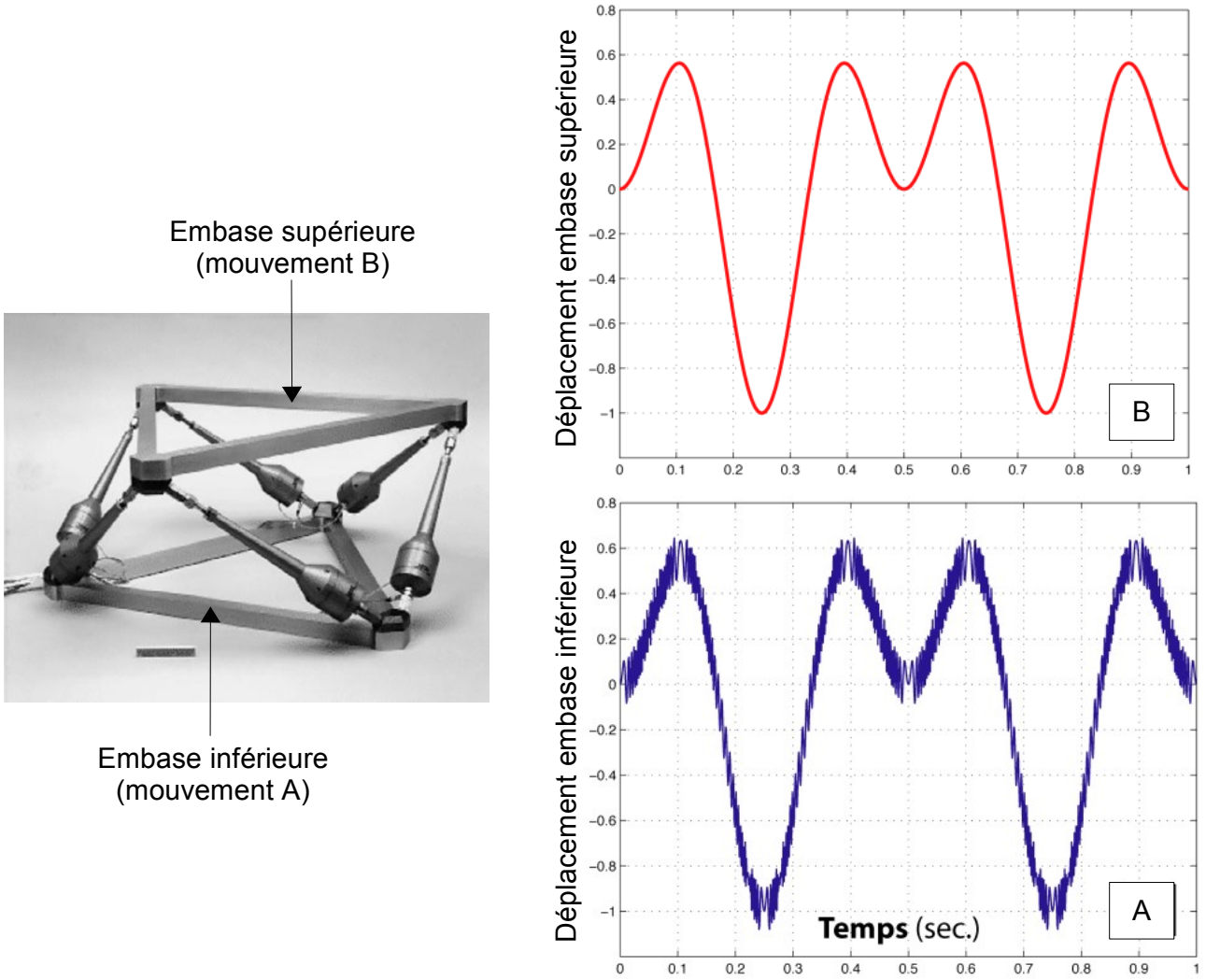


Figure 10 : exemple de filtrage haute fréquence entre le mouvement de l'embase inférieure [A] et le mouvement de l'embase supérieure [B], qui annule les bruits parasites.

Deux solutions de filtrages son imaginables : le filtrage passif (obtenu sans apport d'énergie extérieure, simplement en utilisant le caractère dissipatif de certains composants, comme par exemple un amortisseur par frottement visqueux en mécanique) ou le filtrage actif (obtenu avec apport d'énergie extérieure et utilisation d'un composant pilotable, comme par exemple un vérin piloté en mécanique).

Q7 : En règle générale en électronique, citer un exemple de composants qu'il est possible d'utiliser pour obtenir un filtrage passif et un exemple de composants pour un filtrage actif.

L'objectif de cette partie est de justifier le choix de l'amortissement actif plutôt que l'amortissement passif pour valider les niveaux des critères de la fonction FS1, représentés sur la figure 9.

Le modèle d'étude retenu est le suivant (voir figure 11) : on ne considère que le cas simplifié des mouvements de translation suivant l'axe $\vec{z}_7=\vec{z}_8$ ($\vec{z}_7$ vecteur perpendiculaire au plan de l'embase inférieure, et $\vec{z}_8$ vecteur perpendiculaire au plan de l'embase supérieure, tous deux supposés vecteurs de base d'un repère Galiéen) de l'embase inférieure 7 et de l'embase supérieure 8 surmontée d'un télescope (l'ensemble embase supérieure et télescope a une masse $M=1000\ \text{kg}$). Le lien entre les embases est modélisé par un ressort de raideur $k_T=10^6\ \text{N.m}^{-1}$ (représentant l'élasticité équivalente des bras, en projection sur $\vec{z}_7=\vec{z}_8$) et un amortisseur visqueux de coefficient d'amortissement c_T (représentant la dissipation interne par frottement dans les bras et les liaisons entre les bras). On rappelle que, dans l'amortisseur visqueux, l'effort developpé suite à un allongement $z(t)$ est $-c_T\dfrac{dz(t)}{dt}$.

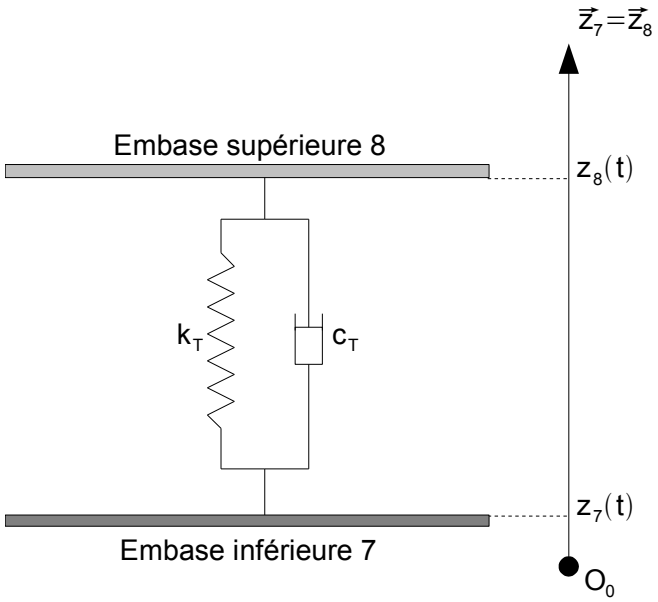


Figure 11 : modèle d'étude retenu pour l'étude de l'amortissement des vibrations hautes fréquences entre l'embase inférieure et l'embase supérieure. Les coordonnées $z_7(t)$ et $z_8(t)$ sont définies par rapport à la position d'équilibre des embases correspondantes.

Q8 : Déterminer l'expression analytique, dans le domaine de Laplace, de la fonction de transfert $H(p)=\dfrac{Z_8(p)}{Z_7(p)}$ du filtre réalisé. "p" est la variable de Laplace.

Q9 : Montrer que $H(p)$ peut se mettre sous la forme suivante : $H(p)=\dfrac{1+2\dfrac{\xi}{\omega_0}p}{1+2\dfrac{\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$.

Déterminer les expressions analytiques des constantes ξ et ω_0.

Q10 : Montrer la pertinence du choix des bras en comparant la valeur numérique de ω_0 à la pulsation de cassure ω_c souhaitée (voir figure 9).

Q11 : Représenter, sur le document réponse 3, les diagrammes de Bodes de $H(p)$, pour $\xi=1$.

Les diagrammes de Bode en gain, pour les valeurs $\xi=0{,}01$, $\xi=0{,}3$ et $\xi=2$ sont représentés sur la figure 12.

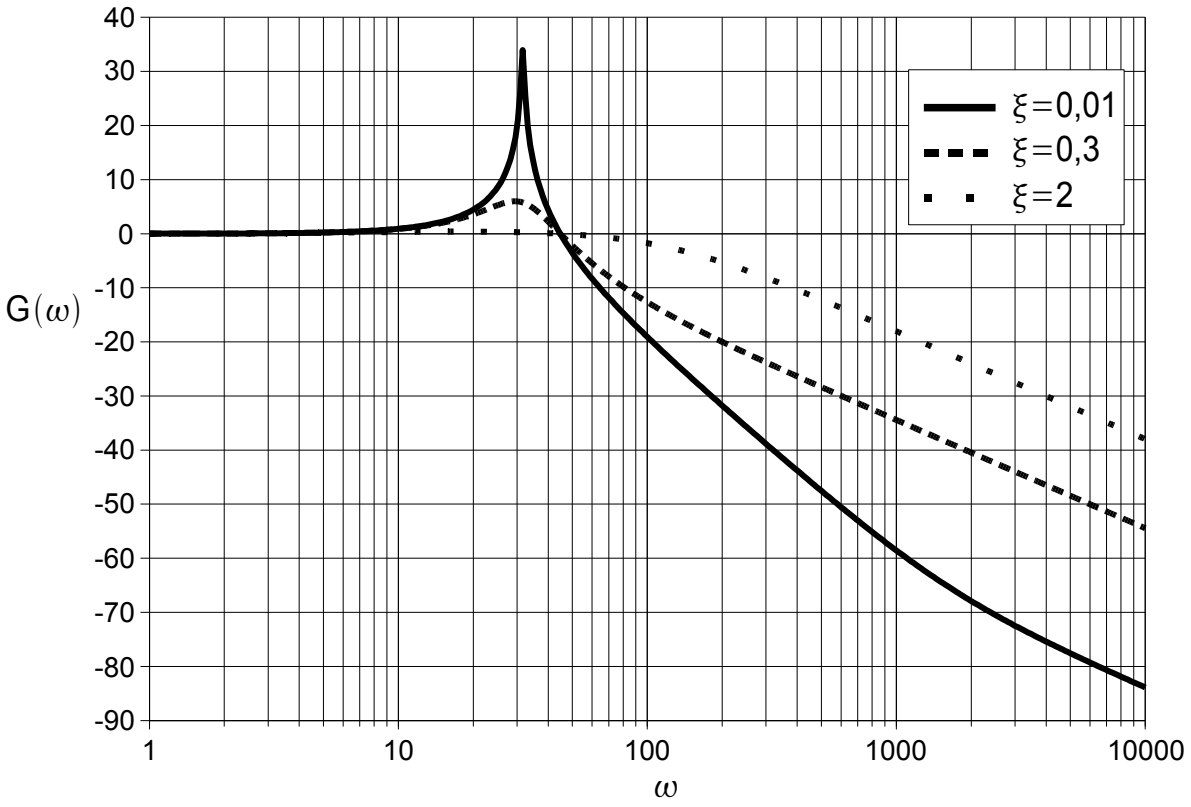


Figure 12 : diagrammes de bode, en gain, de la fonction $H(p)$.

Q12 : Commenter le choix de ξ à prendre. Discuter en particulier de son influence sur la résonance et le filtrage hautes fréquences.

Q13 : Conclure quant à la pertinence du choix d'un amortissement actif pour satisfaire les niveaux des critères de la fonction FS1 de la figure 9.

Partie 2 : validation du critère de filtrage des vibrations hautes fréquences de la fonction FS1

L'objectif de cette partie est la validation du critère de filtrage des vibrations hautes fréquences de la fonction FS1, rappelé dans le tableau suivant :

Fonction	Critère	Niveau
FS1 : permettre à l'assemblage de poutres de positionner le télescope	Filtrage des vibrations hautes fréquences	Décroissance de 40 dB/décade

L'architecture de la plate forme retenue est l'architecture cubique (voir figure 13). Avec cette architecture, l'embase supérieure et l'embase inférieure prennent appui sur les diagonales des faces d'un cube.

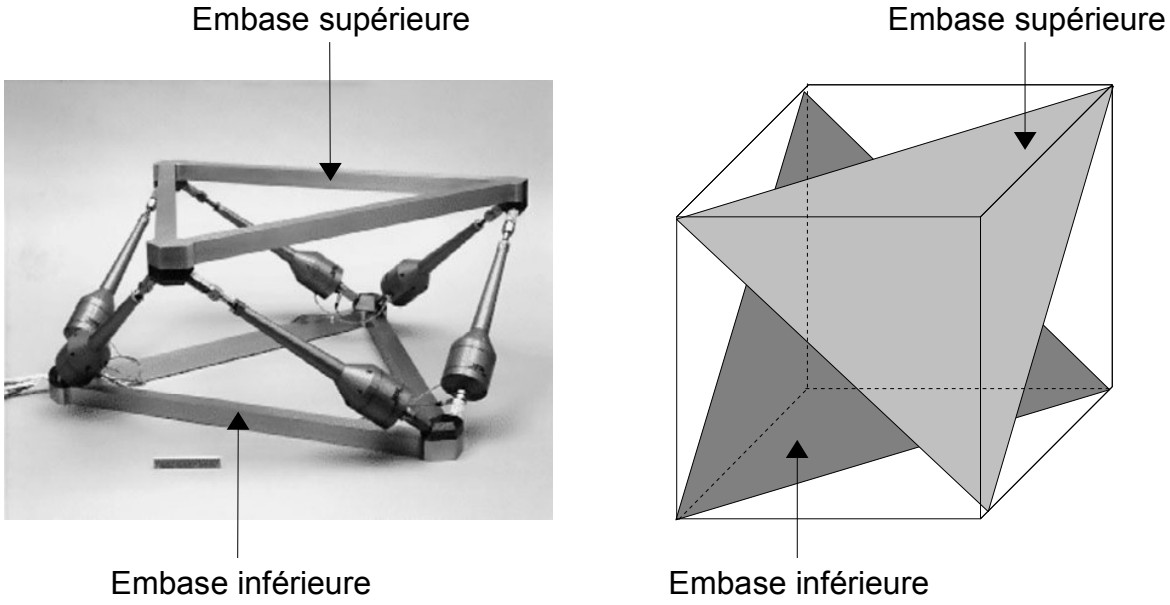


Figure 13 : architecture retenue pour la plate forme.

Cette architecture est intéressante, car elle permet d'avoir les avantages suivants :

- rigidité uniforme de la plate forme selon toutes les directions ;
- interaction faible entre les différents actionneurs ;
- étude cinématique et dynamique simple.

Le modèle d'étude retenu pour cette partie est le suivant (voir figures 14 et 15) :

$R_0 = (O_0 ; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) = (O_0 ; b_0)$ est un repère, supposé galiléen, lié à la station spatiale d'observation. O_0 est un coin du cube contenant la plate forme, situé au dessous de l'embase inférieure. b_0 prend appuie sur les arrêtes de ce cube.

Les 6 bras, numérotés de 1 à 6, ont une longueur notée $q_i(t)(i \in \{1,2,3,4,5,6\})$. Leurs

extrémités sont notées B_i pour celles situées sur l'embase inférieure, et A_i pour celles situées sur l'embase supérieure. Les contacts entre les bras et les embases supérieures et inférieures sont modélisés par des liaisons rotules, aux points A_i et B_i. Les masses des bras sont négligées.

$R_7=(O_7;\vec{x_7},\vec{y_7},\vec{z_7})=(O_7;b_7)$ est un repère lié à l'embase inférieure. O_7 est le centre de cette embase, et $\vec{z_7}$ est dirigé selon la perpendiculaire à cette embase. $B_i(i\in\{1,2,3,4,5,6\})$ sont les points d'attache des 6 bras de la plate forme sur cette embase. Avec l'architecture cubique, on a $B_2=B_3$, $B_4=B_5$ et $B_1=B_6$.

$R_8=(O_8;\vec{x_8},\vec{y_8},\vec{z_8})=(O_8;b_8)$ est un repère lié à l'embase supérieure, surmontée d'un télescope. O_8 est le centre de l'embase, et $\vec{z_8}$ est dirigé selon la perpendiculaire à cette embase. $A_i(i\in\{1,2,3,4,5,6\})$ sont les point d'attache des 6 bras de la plate forme sur cette embase. Avec l'architecture cubique, on a $A_1=A_2$, $A_3=A_4$ et $A_5=A_6$. On note G_8 le centre de gravité de cette embase, surmontée du télescope, avec $\overrightarrow{O_8G_8}=h\vec{z_8}$. La masse et la matrice d'inertie de l'embase, surmontée du télescope, sont notées M et $\left[I_{G_8}(8/0)\right]=\begin{pmatrix}A_8 & 0 & 0\\ 0 & B_8 & 0\\ 0 & 0 & C_8\end{pmatrix}_{b_8}$.

On note $\vec{u_i}=\dfrac{\overrightarrow{B_iA_i}}{\|\overrightarrow{B_iA_i}\|}$ le vecteur, de norme 1, colinéaire au bras i, allant de l'embase inférieure à l'embase supérieure.

Au repos, dans la position parfaite du cube, la longueur de chaque bras est $q_i(t)=L$ $(\forall i\in\{1,2,3,4,5,6\})$, et $\overrightarrow{O_7O_8}=Z\vec{z_7}=Z\vec{z_8}$.

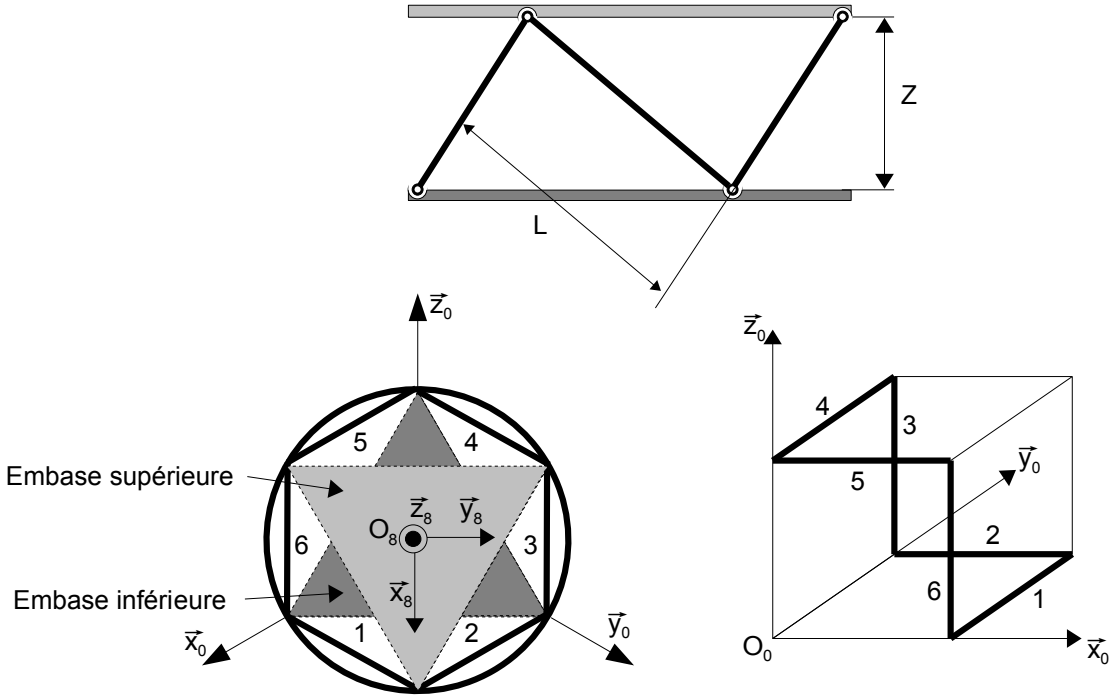


Figure 14 : architecture retenue pour la plate forme au repos.

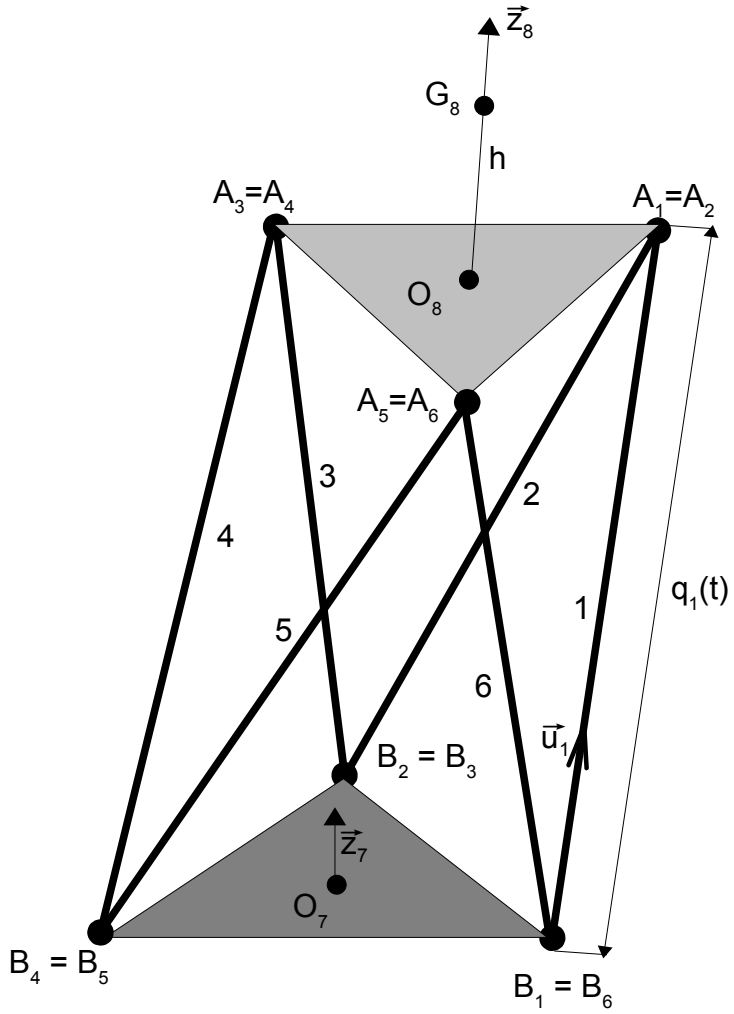


Figure 15 : paramétrage de la plate forme.

Q14 : Montrer qu'avec la modélisation adoptée, il sera possible de relier les efforts dans les vérins aux déplacements des embases, et donc de connaître le comportement de la plate forme.

Q15 : Déterminer la relation entre L et Z.

Q16 : Montrer qu'on a l'équation suivante :

$$\dot{q}_i(t)=\left(\vec{V}(O_8\in 8/0)-\vec{V}(O_7\in 7/0)\right).\vec{u}_i+\left(\overrightarrow{A_iO_8}\wedge\vec{\Omega}(8/0)-\overrightarrow{B_iO_7}\wedge\vec{\Omega}(7/0)\right)\vec{u}_i$$

On pose $\Delta\vec{\Omega}=\vec{\Omega}(8/0)-\vec{\Omega}(7/0)$ et $\Delta\vec{V}=\vec{V}(O_8\in 8/0)-\vec{V}(O_7\in 7/0)-\overrightarrow{O_8O_7}\wedge\vec{\Omega}(7/0)$.

Q17 : Justifier que $\Delta\vec{\Omega}$ et $\Delta\vec{V}$ caractérisent le mouvement relatif entre l'embase supérieure et l'embase inférieure : si $\Delta\vec{\Omega}=\vec{0}$ et $\Delta\vec{V}=\vec{0}$, alors la plate forme bouge selon un mouvement de corps rigide (et donc $\dot{q}_i(t)=0$, $(\forall i\in\{1,2,3,4,5,6\})$).

En combinant les équations précédentes, on montre que $\dot{q}_i(t)=\Delta\vec{V}.\vec{u}_i+\left(\overrightarrow{A_iO_8}\wedge\Delta\vec{\Omega}\right).\vec{u}_i$.

On utilise une notation matricielle. On note $\left(\dot{q}_i(t)\right)=\begin{pmatrix}\dot{q}_1(t)\\ \vdots \\ \dot{q}_6(t)\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\Delta\vec{V}\\ \Delta\vec{\Omega}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta\vec{V}.\vec{x_8}\\ \Delta\vec{V}.\vec{y_8}\\ \Delta\vec{V}.\vec{z_8}\\ \Delta\vec{\Omega}.\vec{x_8}\\ \Delta\vec{\Omega}.\vec{y_8}\\ \Delta\vec{\Omega}.\vec{z_8}\end{pmatrix}$.

Q18 : Montrer qu'il existe une matrice $[J]$ de dimension 6x6 telle que $\left(\dot{q}_i(t)\right)=[J].\begin{pmatrix}\Delta\vec{V}\\ \Delta\vec{\Omega}\end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de $[J]$ en fonction des vecteurs $\vec{u}_i$ et $\overrightarrow{A_iO_8}$.

Soit $\overrightarrow{f_i(t)}$ la force qu'exerce le bras i sur l'embase supérieure.

Q19 : Justifier que $\overrightarrow{f_i(t)}=f_i(t)\vec{u}_i$.

On pose $\vec{F}=\sum_{i=1}^{6} f_i(t)\vec{u}_i$ la somme des forces et $\vec{M}=\sum_{i=1}^{6}\overrightarrow{O_8A_i}\wedge f_i(t)\vec{u}_i$ la somme des moments en O_8 qu'exercent les bras sur l'embase supérieure, et on note

$$\left(f_i(t)\right)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\ \vdots \\ f_6(t)\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}\vec{F}\\ \vec{M}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{F}.\vec{x_8}\\ \vec{F}.\vec{y_8}\\ \vec{F}.\vec{z_8}\\ \vec{M}.\vec{x_8}\\ \vec{M}.\vec{y_8}\\ \vec{M}.\vec{z_8}\end{pmatrix}$$

On montre facilement qu'en notation matricielle $\begin{pmatrix}\vec{F}\\ \vec{M}\end{pmatrix}={}^t[J].\left(f_i(t)\right)$, où ${}^t[J]$ est la transposée de la matrice $[J]$.

On se place ensuite dans l'hypothèse des petits déplacements : on suppose que l'embase inférieure, l'embase supérieure et le télescope qui lui est attaché bougent peu. Sous cette hypothèse, on peut utiliser l'approximation $b_7=b_8$ quasiment fixes par rapport à b_0, et l'équation $\left(\dot{q}_i(t)\right)=[J].\begin{pmatrix}\Delta\vec{V}\\ \Delta\vec{\Omega}\end{pmatrix}$ devient $\left(q_i(t)\right)=[J].\begin{pmatrix}\Delta\vec{X}\\ \Delta\vec{\theta}\end{pmatrix}$, où $\Delta\vec{X}=\vec{X}_8-\vec{X}_7-\overrightarrow{O_8O_7}\wedge\vec{\theta}_7$ et $\Delta\vec{\theta}=\vec{\theta}_8-\vec{\theta}_7$ représentent le petit déplacement et la petite rotation relative entre le petit déplacement $\vec{X}_8$ du point O_8 et la petite rotation $\vec{\theta}_8$ de l'embase supérieure et le petit déplacement $\vec{X}_7$ du point O_7 et la petite rotation $\vec{\theta}_7$ de l'embase inférieure. Sous ces conditions, toutes les quantités d'ordre 2 et plus en $\vec{X}_7$, $\vec{X}_8$, $\vec{\theta}_7$ et $\vec{\theta}_8$ sont négligées.

Q20 : Sous ces conditions, déterminer les éléments de réduction $M\vec{\Gamma}(G_8 \in 8/0)$ et $\vec{\delta}_{O_8}(8/0)$ du torseur dynamique de 8 dans son mouvement par rapport à 0 $\{D(8/0)\} = \begin{Bmatrix} M\vec{\Gamma}(G_8 \in 8/0) \\ \vec{\delta}_{O_8}(8/0) \end{Bmatrix}_{O_8}$. N'effectuer aucun calcul vectoriel pour cette question.

On montre facilement qu'en notation matricielle $\begin{pmatrix} M\vec{\Gamma}(G_8 \in 8/0) \\ \vec{\delta}_{O_8}(8/0) \end{pmatrix} = [M].\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \vec{X}_8 \\ \vec{\theta}_8 \end{pmatrix}$, avec :

$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & Mh & 0 \\ 0 & M & 0 & -Mh & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Mh & 0 & A_8 + Mh^2 & 0 & 0 \\ Mh & 0 & 0 & 0 & B_8 + Mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_8 \end{bmatrix}$$

Le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD), appliqué à 8, au point O_8, permet d'écrire l'équation suivante :

$$[M].\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \vec{X}_8 \\ \vec{\theta}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{F} \\ \vec{M} \end{pmatrix} = {}^t[J].(f_i)$$

Conformément à ce qui a était fait dans la partie 1, pour vérifier la décroissance de 40 dB par décade, on utilise de l'amortissement actif, basé sur une rétroaction en force (voir figure 16) : dans chaque bras (dont l'élasticité est modélisée par un ressort de raideur k), un capteur mesure l'effort $f_i(t)$ qu'exerce le bras i sur l'embase supérieure, et une force supplémentaire, proportionnelle à l'intégrale de $f_i(t)$ est exercée (coefficient de proportionnalité g). La force $f_i(t)$ qu'exerce chaque bras sur l'embase supérieure vérifie donc $f_i(t) = -kq_i(t) - g\int f_i(t)$.

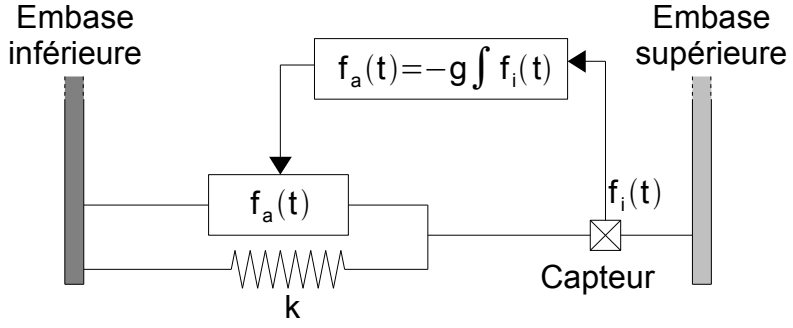


Figure 16 : principe retenu pour l'amortissement actif : retroaction en force.

Q21 : Montrer que l'équation issue du PFD, dans le domaine de Laplace, devient

$$\left([M].p^2 + \frac{p}{p+g}[K]\right)\begin{pmatrix} \vec{X}_8 \\ \vec{\theta}_8 \end{pmatrix} = \frac{p}{p+g}[K]\begin{pmatrix} \vec{X}_7 + \overrightarrow{O_8O_7} \wedge \vec{\theta}_7 \\ \vec{\theta}_7 \end{pmatrix}$$

où p est la variable de Laplace et [K] une matrice symérique à déterminer.

Q22 : Déterminer le taux de décroissance en amplitude, lorsque qu'un mouvement $\begin{pmatrix} \vec{X}_7 + \overrightarrow{O_8 O_7} \wedge \vec{\theta}_7 \\ \vec{\theta}_7 \end{pmatrix}$ haute fréquence (dû à des vibrations parasites) veut se transmettre de l'embase inférieure vers l'embase supérieure $\begin{pmatrix} \vec{X}_8 \\ \vec{\theta}_8 \end{pmatrix}$. Conclure quant à la capacité de la plate forme à satisfaire le critère de filtrage des vibrations hautes fréquences de la fonction FS1

Partie 3 : validation du critère de résonance de la fonction FS1

L'objectif de cette partie est la validation du critère de résonance de la fonction FS1, rappelé dans le tableau suivant :

Fonction	Critère	Niveaux
FS1 : permettre à l'assemblage de poutres de positionner le télescope	Résonance	Pas de résonance
		Pulsation de cassure $\omega_c = 2\pi \times 5\,\text{Hz}$

Le niveaux "pas de résonance" est indispensable car toute amplification démesurée des amplitudes liée à une résonance risquerait d'endommager gravement les systèmes embarqués.

La partie 2 a permis de mettre en équation le mouvement de l'embase supérieure de la plate forme avec amortissement actif, basé sur une rétroaction en force (voir figure 16). L'équation matricielle obtenue est la suivante :

$$\left([M].p^2+\frac{p}{p+g}[K]\right)\begin{pmatrix}\vec{X}_8\\ \vec{\theta}_8\end{pmatrix}=\frac{p}{p+g}[K]\begin{pmatrix}\vec{X}_7+\overrightarrow{O_8O_7}\wedge\vec{\theta}_7\\ \vec{\theta}_7\end{pmatrix}$$

Pour simplifier, seuls les mouvements de translation selon $\vec{z}_7=\vec{z}_8$ et les mouvements de rotation selon $\vec{y}_7=\vec{y}_8$ entre les embases supérieure et inférieure seront considérés (voir figures 14 et 15). Sous cette hypothèse, en négligeant en première approche le couplage rotation / translation, l'équation matricelle précédente devient :

$$\left(Mp^2+\frac{p}{p+g}2k\right)Z_8=\frac{p}{p+g}2kZ_7$$

$$\left(\left(B_8+Mh^2\right)p^2+\frac{p}{p+g}\frac{2}{3}kL^2\right)\theta_8=\frac{p}{p+g}\frac{2}{3}kL^2\theta_7$$

où $M=1000\,\text{kg}$ est la masse de l'embase supérieure, surmontée du téléscope, $g=50\,\text{s}^{-1}$ est la constante de proportionnalité dans la rétroaction en force de l'amortissement actif, $k=500\,000\,\text{N.m}^{-1}$ la raideur d'élasticité des bras de la plate forme, $B_8=83\,\text{kg.m}^2$ l'inertie de l'embase supérieure surmontée du téléscope selon l'axe de direction $\vec{y}_8$ passant par son centre de gravité G_8, h la distance entre O_8 et G_8 $\left(\overrightarrow{O_8G_8}=h\vec{z}_8\right)$ et $L=30\,\text{cm}$ la longueur au repos de chaque bras.

Chaque mouvement peut donc être modélisé par une fonction de transfert du type :

$$\frac{Z_8(p)}{Z_7(p)}=\frac{\mu_1}{p^2+gp+\mu_1}$$

$$\frac{\theta_8(p)}{\theta_7(p)}=\frac{\mu_2}{p^2+gp+\mu_2}$$

Q23 : Déterminer l'expression de μ_1 et μ_2, et calculer numériquement les fonctions de transfert $\frac{Z_8(p)}{Z_7(p)}$ et $\frac{\theta_8(p)}{\theta_7(p)}$, en laissant h comme inconnue.

L'étude de la plate forme revient donc à étudier la fonction de transfert générique de la forme

$$\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{\mu}{p^2+gp+\mu}$$

où $S(p)$ représente la sortie $Z_8(p)$ ou $\theta_8(p)$ et $E(p)$ l'entrée $Z_7(p)$ ou $\theta_7(p)$.

Q24 : Exprimer, en fonction de μ, la condition que g doit vérifier pour qu'il n'y ait pas de résonance.

La figure 17 montre l'évolution de μ_1 et μ_2, en fonction de h.

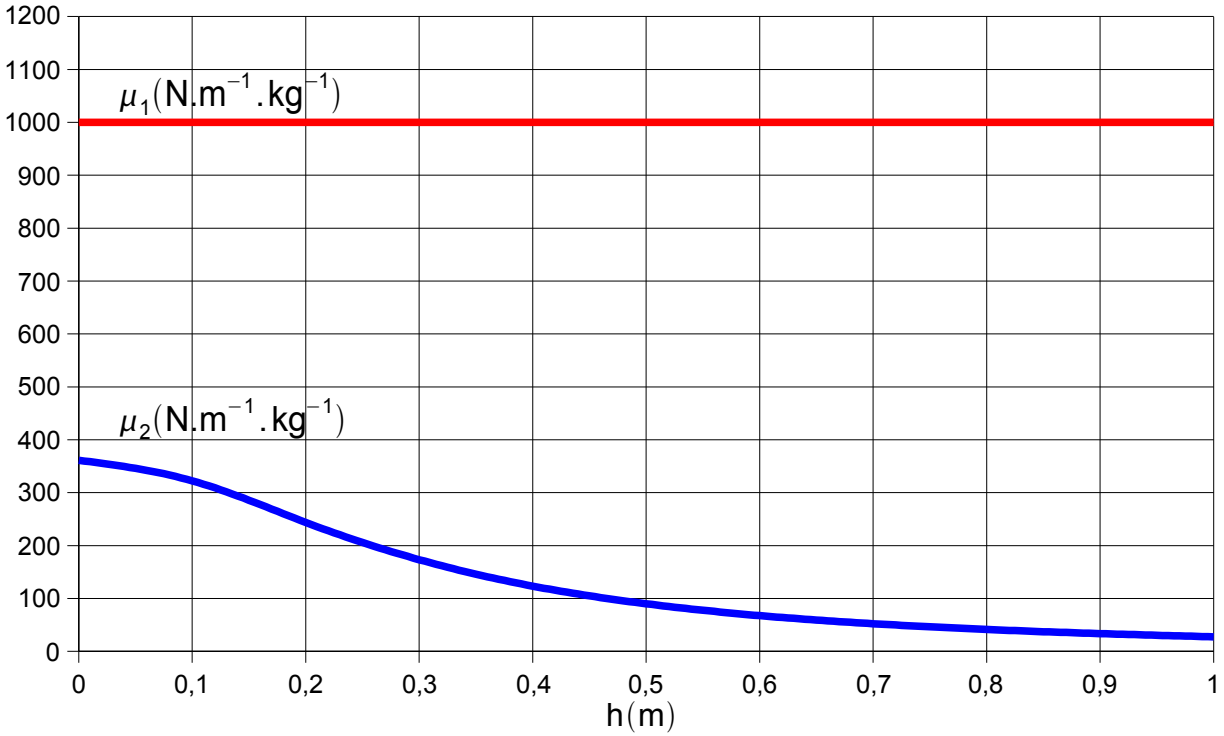


Figure 17 : évolution de μ_1 et μ_2, en fonction de h.

Q25 : Déterminer la valeur de h qui permettrait, au mieux, de satisfaire la valeur de ω_c pour chaque mouvement.

Pour des problèmes d'encombrement, le centre de gravité G_8 est situé à une altitude $h=20\,cm$.

Q26 : Conclure quant à la capacité de la plate forme à satisfaire ou non le niveau "pas de résonance" de la fonction FS1.

La figure 18 représente les diagrammes de Bode de $\frac{Z_8(p)}{Z_7(p)}$ et de $\frac{\theta_8(p)}{\theta_7(p)}$, en gain.

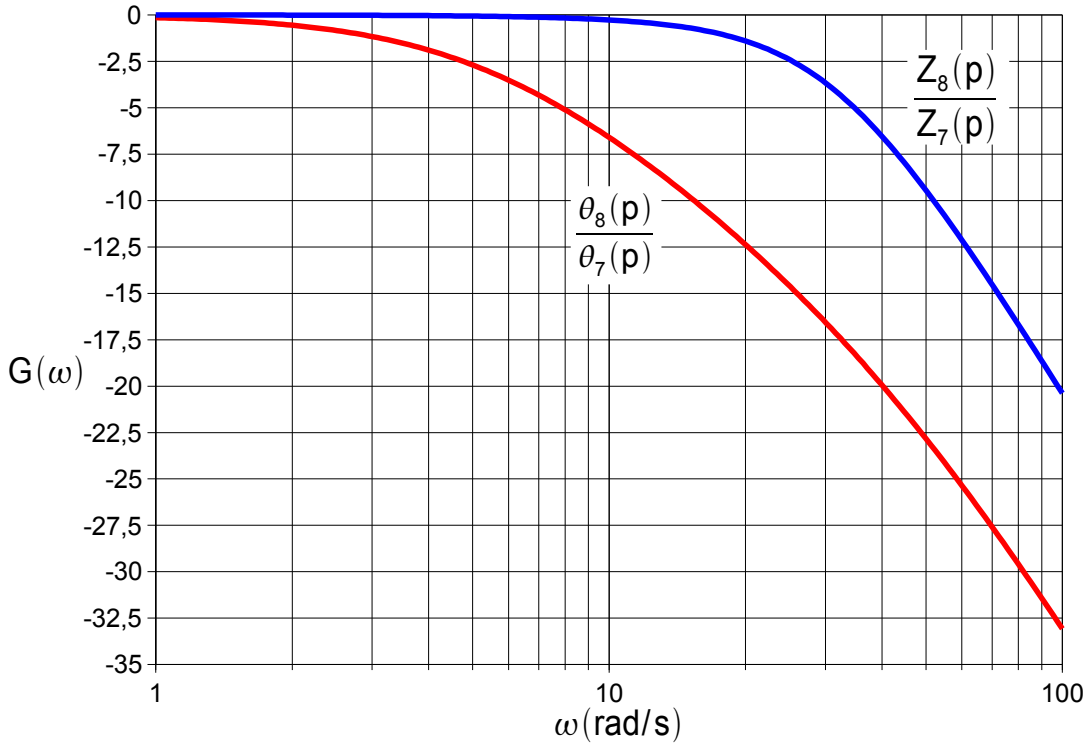


Figure 18 : diagrammes de Bode en gain de $\frac{Z_8(p)}{Z_7(p)}$ et $\frac{\theta_8(p)}{\theta_7(p)}$.

Q27 : Lors d'un mouvement à 1,5 Hz, déterminer la diminution d'amplitude entre $\theta_8(t)$ et $\theta_7(t)$ dû au non respect du niveau lié à la pulsation de cassure de la fonction FS1.

Cette diminution d'amplitude nécessite de modifier la boucle de rétroaction en force pour en améliorer les performances.

Partie 4 : amélioration des performances

Afin d'améliorer encore plus les performances de la station spatiale d'observation, les ingénieurs de l'ESA ont décidé d'ajouter un correcteur de perturbation dans la chaîne directe de pilotage des vérins des plates formes. L'objectif de cette partie est la justification et le dimensionnement d'un correcteur approprié.

Les performances attendues sont les suitantes :

Critères	Niveaux
Précision	Ecart nul pour une consigne échelon Ecart nul pour une perturbation constante
Rapidité	Pulsation de coupure de la FTBO : $\omega_0 = \omega_c = 2\,\pi$ x5 rad / s
Stabilité	Marge de phase M_φ = 45° Marge de gain M_G > 20 dB

On limite l'étude au mouvement de translation selon $\vec{z_7}$ entre les embases supérieure et inférieure de la plate forme (voir figure 19 pour le mouvement étudié, et figure 15 pour la définition du vecteur $\vec{z_7}$).

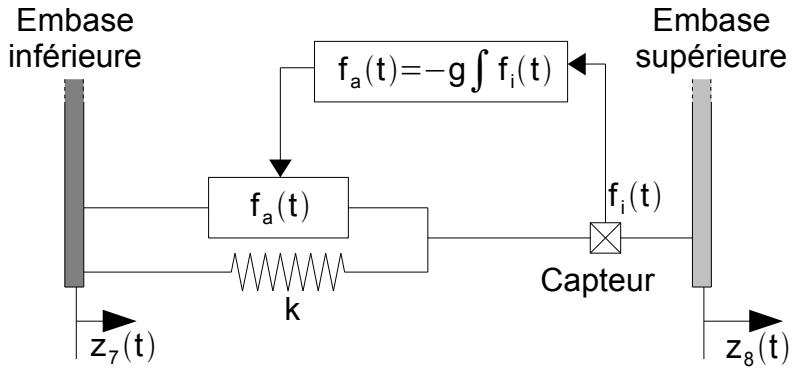


Figure 19 : mouvement de translation étudié, avec amortissement actif par retroaction en force.

Le schéma bloc de l'asservissement est représenté sur la figure 20. k, M et g sont des constantes (voir partie 2). Le schéma bloc à retour unitaire équivalent (avec la fonction de transfert en boucle ouverte $H_0(p)$) est représenté sur la figure 21.

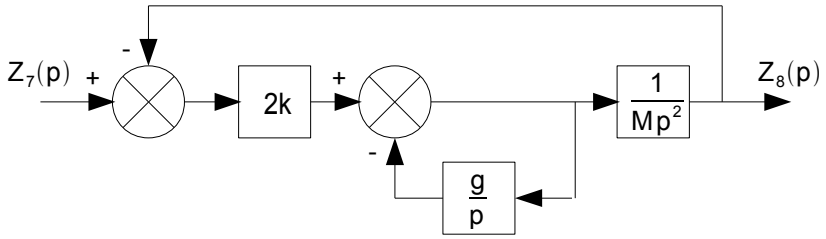


Figure 20 : schéma bloc de l'asservissement.

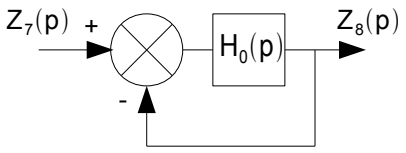


Figure 21 : schéma bloc à retour unitaire.

Q28 : Déterminer l'expression de $H_0(p)$ pour que les schémas blocs des figures 20 et 21 soient équivalents.

Le diagramme de Bode de la fonction $H_0(p)$ est fourni sur la figure 22.

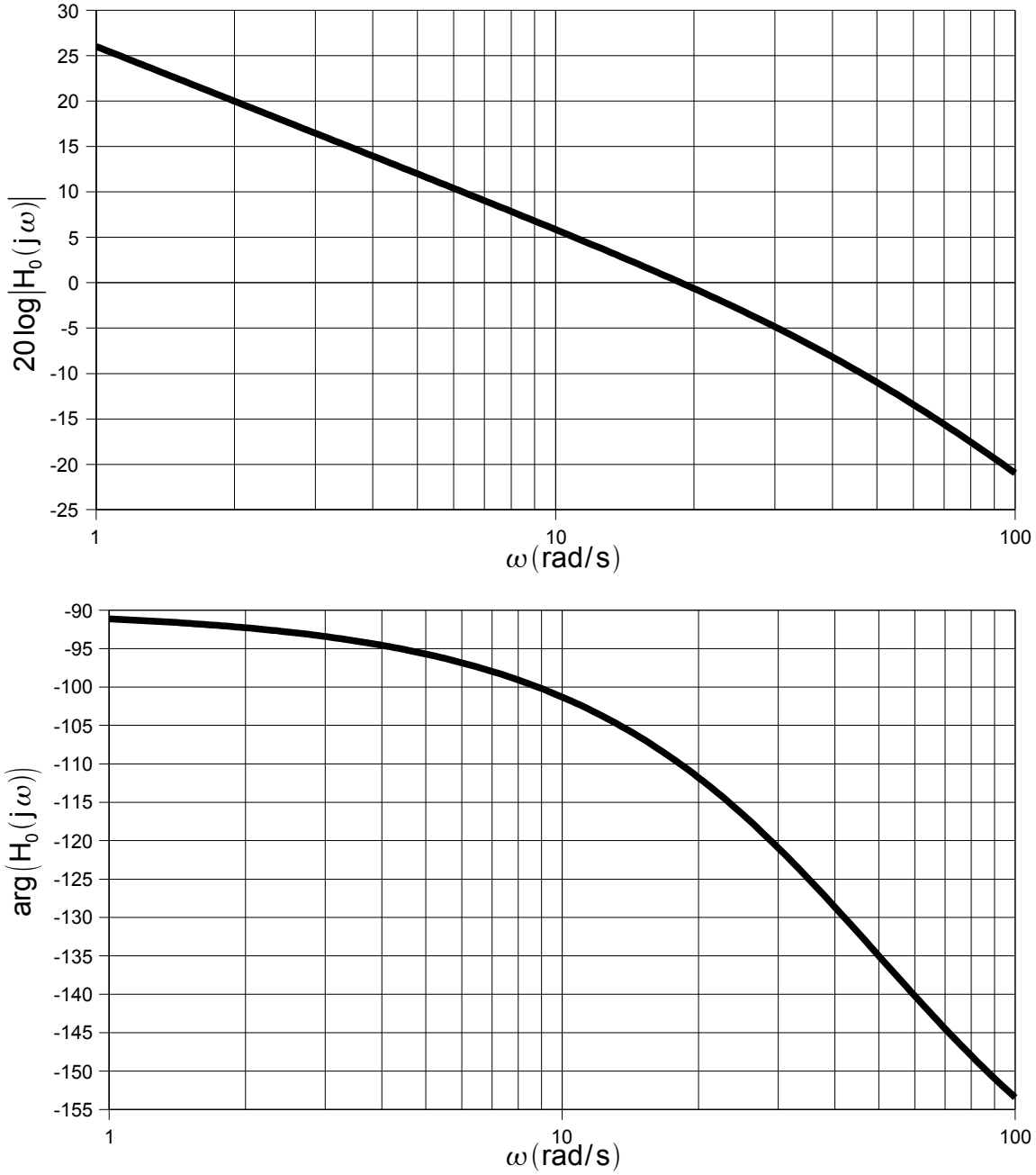


Figure 22 : diagrammes de Bode de la fonction $H_0(p)$.

Q29 : Expliquer en quoi, actuellement, l'asservissement ne satisfait pas les niveaux des critères du cahier des charges.

On choisit d'utiliser un correcteur $C(p)$ pour atteindre le niveau des critères du cahier des charges.

Correcteur porportionnel

On choisit d'insérer, dans la chaîne directe du schéma bloc de la figure 21, un correcteur proportionnel $C(p)=C_0$.

Q30 : Déterminer la valeur de C_0 pour que le niveau du critère de marge de phase soit satisfait.

Q31 : Déterminer la pulsation de coupure ω_0 (la pulsation qui annule le gain) de la FTBO corrigée, et conclure sur la capacité du correcteur proportionnel à satisfaire le cahier des charges.

Correcteur intégral

On choisit d'insérer, dans la chaîne directe du schéma bloc de la figure 21, un correcteur intégral $C(p)=\frac{1}{T_i p}$.

Q32 : Discuter de la capacité de ce type de correcteur à satisfaire le critère de marge de phase, et conclure sur la capacité du correcteur intégral à satisfaire le cahier des charges.

Correcteur intégral et à avance de phase

On choisit d'insérer, dans la chaîne directe du schéma bloc de la figure 21, un correcteur à correction intégrale, associé à un correcteur avance de phase

$$C(p)=\frac{K}{p}.\frac{1+Tp}{1+aTp}=\frac{K}{p}.C_{ap}(p) \quad (a<1)$$

Q33 : Expliquer en quoi ce choix de correcteur permet de satisfaire les critères de précision et de stabilité du cahier des charges.

Q34 : Tracer l'allure des diagrammes de Bode de $C_{ap}(p)$, en précisant, notamment, la valeur de la pulsation ω_m en laquelle la phase est maximale. Déterminer $\sin\left(\arg\left(C_{ap}(j\omega_m)\right)\right)$.

Q35 : Déterminer les valeurs de a et de T pour que la marge de phase corresponde à celle indiquée dans le cahier des charges.

Q36 : Déterminer la valeur de K pour que ω_0 soit la pulsation de coupure ω_C .

Le diagramme de Black-Nichols de la FTBO corrigée est fourni sur la figure 23.

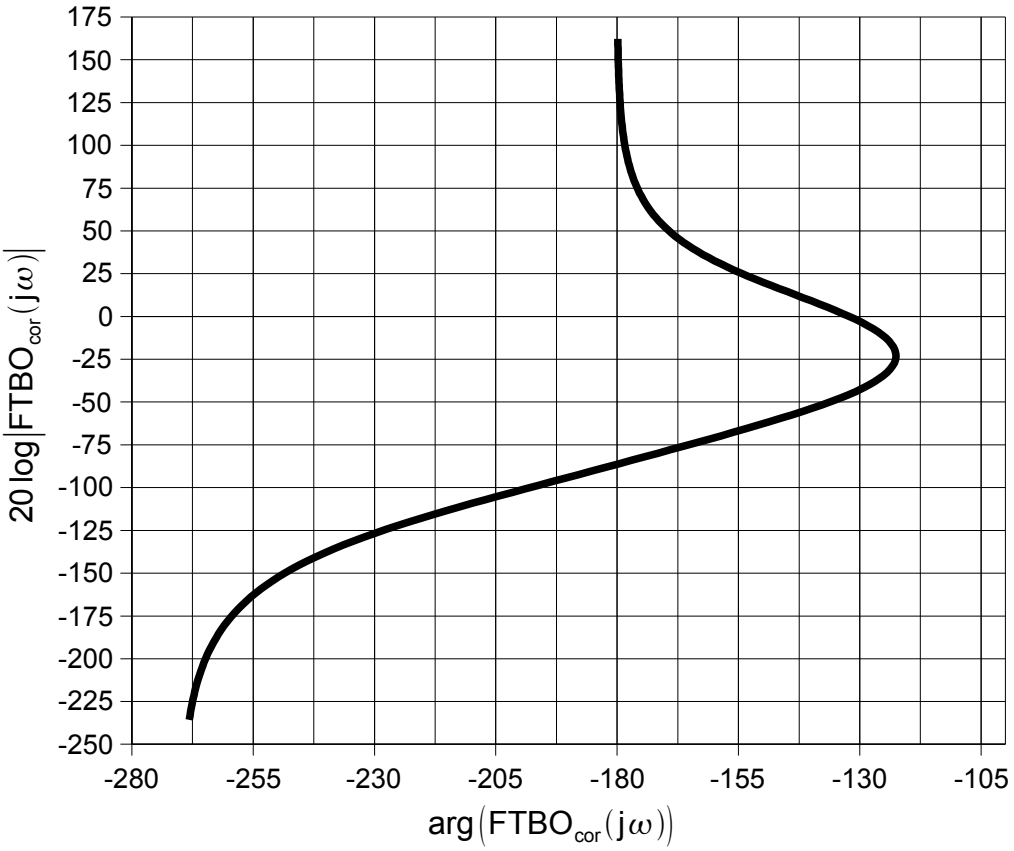
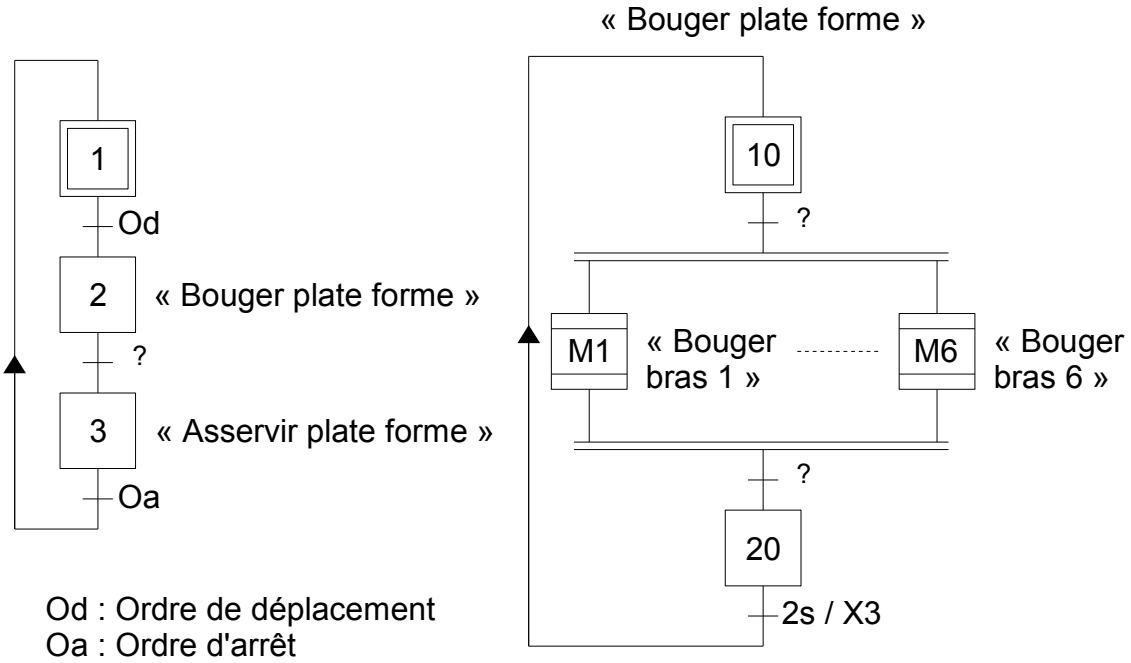


Figure 23 : diagramme de Black-Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte, corrigée.

Q37 : Déterminer la marge de gain.

Q38 : Conclure sur la capacité du correcteur à satisfaire l'ensemble des critères du cahier des charges.

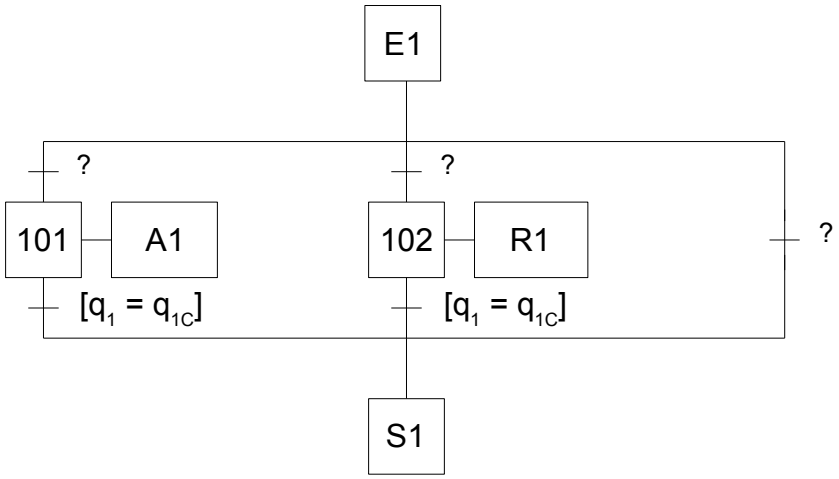
Document réponse 1



Od : Ordre de déplacement
Oa : Ordre d'arrêt

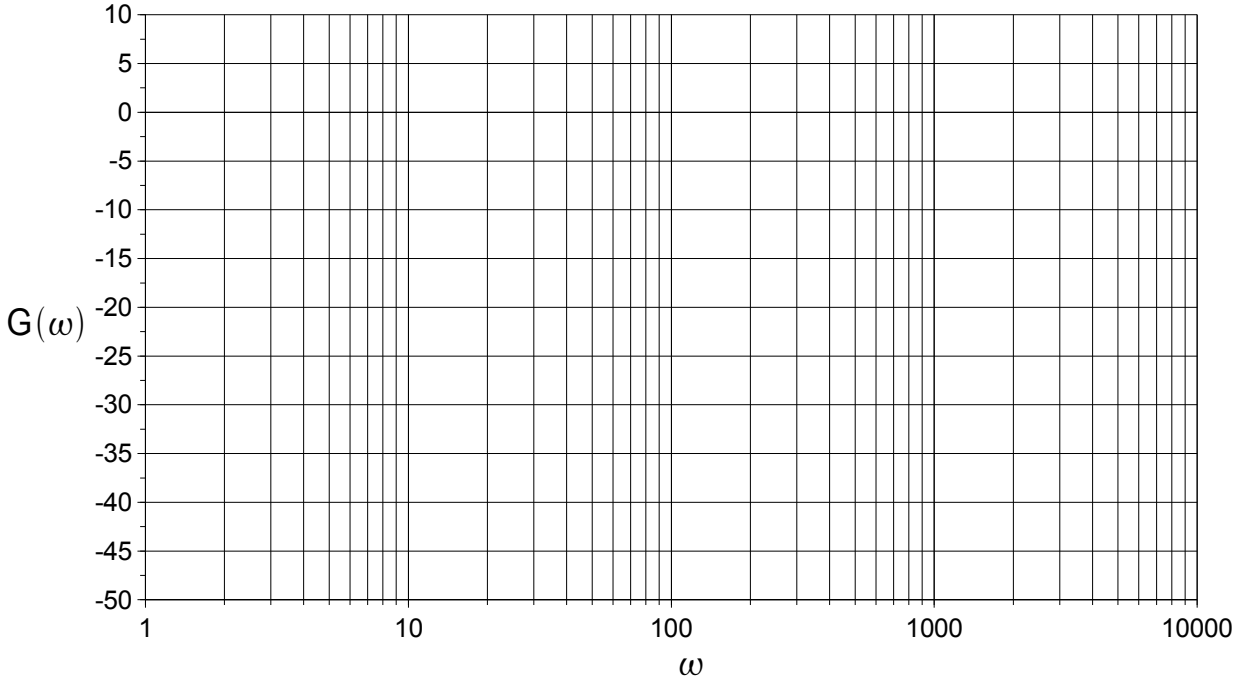
Document réponse 2

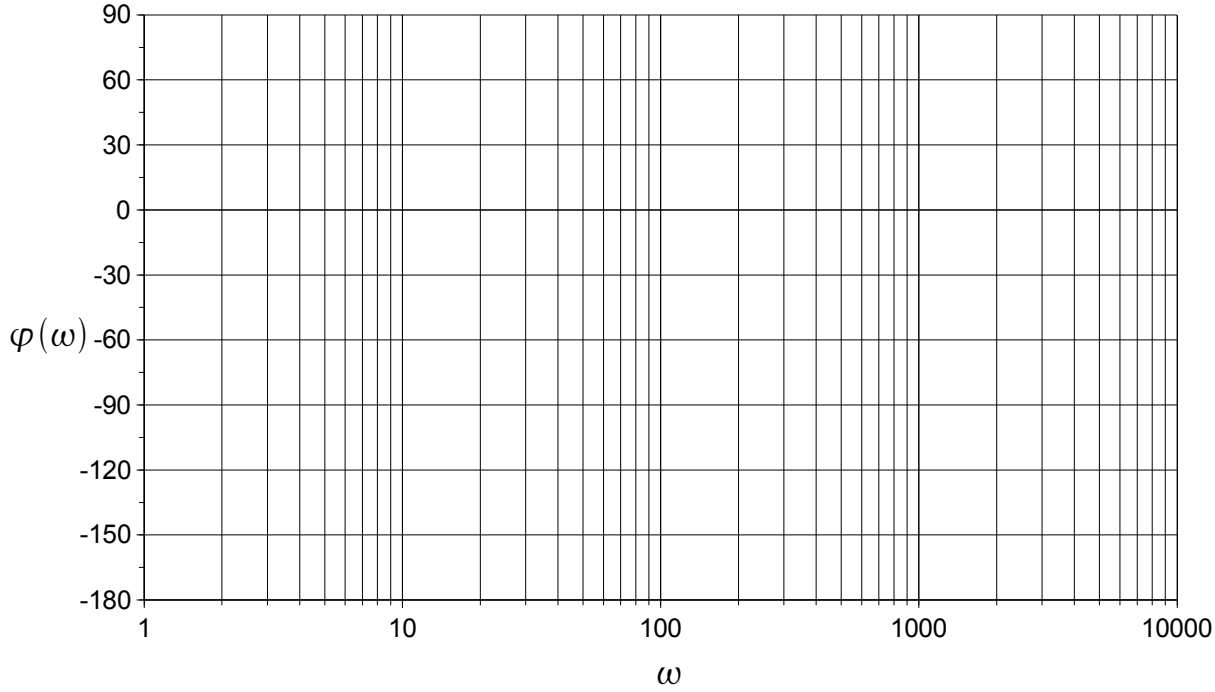
Macro étape M1



A1 : Allonger bras 1
R1 : Raccourcir bras 1

Document réponse 3





Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Ingénierie système : besoin, exigences et diagrammes SysML
- Architecture fonctionnelle et structurelle : chaînes d'information et de puissance
- Réponse fréquentielle et diagrammes de Bode
- Modélisation des systèmes asservis : structure, SLCI, transformée de Laplace, schéma-blocs
- Dynamique des systèmes de solides : principe fondamental, stratégie d'isolement, équilibrage
- Cinétique : torseurs cinétique et dynamique, énergie cinétique, inertie équivalente
- Géométrie des masses : centre d'inertie, matrice d'inertie, théorème de Huygens
- Modèles de comportement et réponse temporelle : premier ordre, second ordre, identification

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/x-ens/psi