Concours d'admission de l'École polytechnique et des ENS (X-ENS), France

Session 2012, filière PSI

Mathématiques

Ce que traite le sujet

- Préambule
- Partie 1 : fonctionnelle quadratique et méthode du gradient à pas fixe
- Partie 2 : suites de descente pour x au carré
- Partie 3 : suites de descente en dimension quelconque
- Partie 4 : conditions de décroissance suffisante et convergence

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie recomposée du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/x-ens/psi/2012/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

X-ENS PSI - 2012
calculatrices autorisées

Dans tout le problème, on dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est coercive si et seulement si elle est continue et vérifie

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$$

où la norme de x correspond à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
L'objectif du problème est d'étudier certains exemples de fonctions coercives, de montrer en particulier qu'elles possèdent toujours un ou plusieurs minimum global et d'en étudier des méthodes d'approximation. Le préambule contient un résultat utilisé tout au long du problème. Les quatre parties sont assez largement indépendantes.
On note $(.,.)$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$ et pour toute fonction f de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $\nabla f(x)$ le vecteur gradient de f au point x formé des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Préambule.

1. Soit f une fonction coercive de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que si $\|x\| > M$ alors
$$f(x) \geq |f(0)| + 1$$
2. En déduire qu'il existe un élément $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x^*) \leq f(x)$$
On dit alors que x^* est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$.
3. On suppose de plus que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Que peut-on dire de $\nabla f(x^*)$?

Partie 1.

Dans cette partie, on considère la fonction g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ g(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$$

où $b \in \mathbb{R}^3$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique telle que

$$\exists C > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^3,\ (Ax, x) \geq C\|x\|^2$$

4. Montrer que g est coercive.
5. Montrer que g est de classe C^1 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ et que
$$\nabla g(x) = Ax - b$$
En déduire que g possède un unique minimum global noté x^*.
6. On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^3$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}^3$ quelconque et
$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = u_k - \alpha\nabla g(u_k)$$
où α est un réel positif fixé. Montre que
$$u_{k+1} - x^* = (I_3 - \alpha A)(u_k - x^*)$$
7. On note L la plus grande valeur propre de A (en valeur absolue). Montrer que si $\alpha \in \left]0, \frac{2}{L}\right[$, alors la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente vers x^*.

Partie 2.

Dans cette partie, on considère la fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = x^2$$

On s'intéresse aux suites réelles $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, appelées suites de descente par gradient de h, définies de la manière suivante :

$$x_0 \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ \forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1} = x_k + \varepsilon_k t_k$$

avec

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1 \ \text{ si } \ x_k < 0 \\ -1 \ \text{ si } \ x_k > 0 \\ 0 \ \text{ si } \ x_k = 0 \end{cases}$$

et où t_k est un réel choisi dans l'intervalle $]0, 2|x_k|[$ si $x_k \neq 0$ et $t_k = 0$ si $x_k = 0$.

8. Montrer que si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de descente par gradient de h, alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ h(x_{k+1}) \leq h(x_k)$$

9. On considère la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $v_0 = 2$ et

$$v_{k+1} = v_k - \frac{1}{2^{k+1}}$$

Montrer que $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de descente par gradient pour la fonction h qui ne converge pas vers le minimum global de h.

10. On considère la suite $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $w_0 = 2$ et

$$w_{k+1} = w_k + (-1)^{k+1}(2 + \frac{3}{2^{k+1}})$$

Montrer que $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de descente par gradient pour la fonction h non convergente.

Partie 3.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On note

$$D_x = \{d \in \mathbb{R}^n,\ \|d\| = 1 \ \text{ et } \ (d, \nabla f(x)) < 0\}$$

11. Montrer que D_x est non vide si $\nabla f(x) \neq 0$ et que si $d \in D_x$, alors

$$T_{d,x} = \{t \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x + td) < f(x)\}$$

est également non vide.

On considère une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$x_0 \in \mathbb{R}^n \ \text{ et } \ \forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1} = x_k + t_k d_k \tag{1}$$

avec

$$\begin{cases} d_k \in D_{x_k} \ \text{ et } \ t_k \in T_{d_k,x_k} \ \text{ si } \ \nabla f(x_k) \neq 0 \\ d_k = 0 \ \text{ et } \ t_k = 0 \ \text{ si } \ \nabla f(x_k) = 0 \end{cases}$$

On dit alors que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de descente par gradient pour la fonction f.

12. Vérifier que la définition précédente coïncide bien avec la définition des suites de descente par gradient donnée dans la partie 2 pour la fonction particulière h.

13. Dans le cas général, montrer que si f est de plus une fonction coercive, alors la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.
14. On reprend dans cette question les notations et définitions de la partie 1. Montrer que lorsque α appartient à un intervalle de $\mathbb{R}^{+*}$ qu'on déterminera, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de descente par gradient pour la fonction g. On pourra commencer par montrer que

$$g(u_{k+1}) - g(u_k) = -\alpha\|r_k\|^2 + \frac{1}{2}\alpha^2(Ar_k, r_k)$$

avec $r_k = \nabla g(u_k)$.

Partie 4.

Dans toute cette partie, f désigne une fonction de classe C^1, coercive de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de descente par gradient pour la fonction f (c'est à dire définie par la relation (1) de la partie 3).

15. On suppose que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie de plus la condition suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + m_1 t_k(d_k, \nabla f(x_k)) \tag{2}$$

où m_1 est un réel fixé dans $]0, 1[$.
Montrer que pour toute suite de descente par gradient vérifiant la condition (2), la série de terme général $(t_k(d_k, \nabla f(x_k)))_{k\in\mathbb{N}}$ est minorée puis que

$$\lim_{k\to+\infty} t_k(d_k, \nabla f(x_k)) = 0$$

16. On suppose que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de descente par gradient vérifie la condition (2) et la condition supplémentaire suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ t_k \geq \min(C_1, C_2|(d_k, \nabla f(x_k))|) \tag{3}$$

où C_1 et C_2 sont deux réels > 0. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} (d_k, \nabla f(x_k)) = 0$$

17. On suppose que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de descente par gradient vérifie les conditions (2), (3) et que si $\nabla f(x_k) \neq 0$,

$$d_k = -\frac{B\nabla f(x_k)}{\|B\nabla f(x_k)\|}$$

où B est une matrice symétrique de taille n dont les valeurs propres sont > 0. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \nabla f(x_k) = 0$$

18. On suppose dans cette question et la suivante que $n = 1$ et de plus que f est coercive, de classe C^2 et strictement convexe, c'est à dire que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in]0, 1[,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Montrer que f possède un unique minimum global x^* sur $\mathbb{R}$.
19. Les hypothèses de la question précédente sont conservées. A partir d'un réel x_0 quelconque, proposer un algorithme de construction d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de descente par gradient pour la fonction f qui vérifie les conditions (2) et (3). En déduire qu'une telle suite est convergente vers l'unique minimum global de f (on admettra que de toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente et que si toutes ces sous-suites convergentes possèdent une même limite, alors la suite est convergente).

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Espaces vectoriels normés
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Nombres réels et suites numériques
- Suites récurrentes
- Dérivabilité et convexité
- Séries numériques et vectorielles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/x-ens/psi