Concours d'admission de l'École polytechnique et des ENS (X-ENS), France

Session 2018, filière PSI

Sciences de l'ingénieur

Durée : 5 heures

Ce que traite le sujet

- 2 Étude de la cinématique de compression
- 3 Étude de l'influence de la qualité du guidage de la spirale
- 4 Choix de la motorisation du compresseur
- 5 Équilibrage statique et dynamique de l'ensemble des parties mobiles
- 6 Asservissement de la température d'une chambre

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/x-ens/psi/2018/si

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CX8614

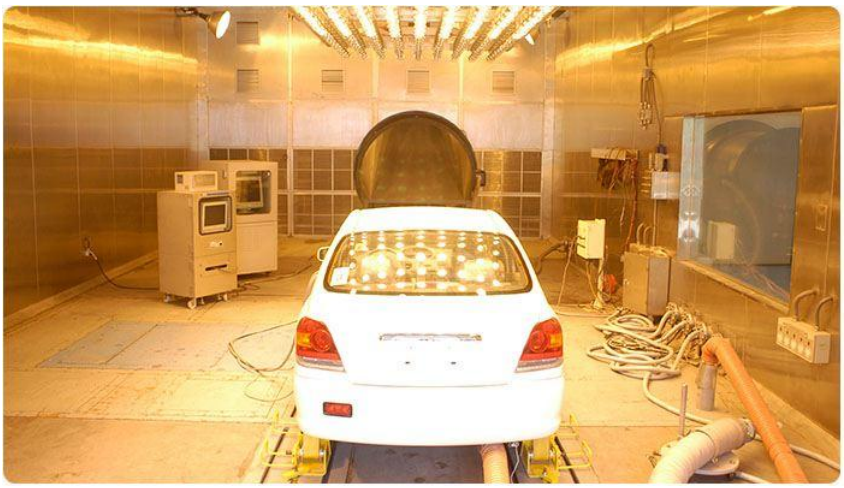
Banque commune École Polytechnique – InterENS
PSI
Session 2018

Épreuve de Sciences Industrielles

Durée: 5 heures

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est interdit.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Etude d'une pompe à chaleur à compresseur Scroll pour simuler des conditions climatiques extrêmes



Essai d'un véhicule en chambre climatique
(source : http://www.testingandsimulation.com/)

Le sujet est composé :
- de ce livret décrivant le système étudié ainsi que le travail demandé (page 1 à page 33) ;
- de 1 page d'annexe ;
- de 4 documents réponse à joindre obligatoirement à la copie (documents DR1, DR2, DR3 et DR4).

Il est recommandé au candidat :
- de lire l'intégralité du sujet avant de commencer à composer ;
- de rappeler, sur sa copie, le numéro de la question avant d'en développer la réponse ;
- de respecter l'ensemble des notations alphabétiques et numériques du sujet ;
- de préciser ses propres notations lorsque cela s'avère nécessaire ;
- de justifier ses hypothèses et de rédiger clairement ses réponses.

Les différentes parties de ce sujet sont relativement indépendantes. Néanmoins, il est recommandé de les traiter dans l'ordre proposé afin de tenir compte des différentes remarques et des notations.

Pour des soucis de praticité, la totalité des valeurs numériques nécessaires aux différents calculs a été synthétisée en dernières pages du sujet.

1 Introduction

1.1 Enjeux économiques et environnementaux

Un laboratoire spécialisé dans les essais climatiques teste différents équipements (véhicules automobiles, ferroviaires, systèmes aéronautiques et spatiaux, composants électroniques…) dans les conditions environnementales où ils seront utilisés. Différents modèles de chambres climatiques sont exploités, pour lesquels le contrôle de la température constitue l'un des postes les plus coûteux en énergie. L'objectif ici est d'étudier la faisabilité d'un remplacement des moyens de chauffage classiques, au fuel, au gaz ou électriques, par une pompe à chaleur (PAC) en mode « chauffage ».
Le principe de la PAC consiste à transférer de l'énergie thermique d'une source froide (air, sol ou eau des nappes phréatiques) vers une source chaude (le local à réchauffer), inversant ainsi le sens naturel du flux spontané de l'énergie thermique. Pour cela les parties mécaniques de la PAC consomment une certaine quantité d'énergie, mais le dispositif permet d'en récupérer 3 à 4 fois plus au niveau calorifique que la quantité consommée aurait permis de chauffer directement. Cela rend l'installation économe en énergie et participe ainsi au développement durable.

1.2 Fonctionnement des pompes à chaleur

Le cycle de fonctionnement de la PAC se compose de quatre étapes, réalisées par quatre organes principaux (Figure 1) :

- la circulation du fluide est assurée grâce au compresseur, qui élève la pression et la température du fluide frigorigène gazeux en le comprimant ;
- dans le condenseur (source chaude), le fluide frigorigène cède sa chaleur au fluide du circuit de chauffage (eau, air, etc.) en passant de l'état gazeux à l'état liquide ;
- la pression du fluide frigorigène en phase liquide est ensuite réduite dans le détendeur ;
- dans l'évaporateur (source froide), la chaleur est prélevée au niveau du circuit de captage pour vaporiser le fluide frigorigène.

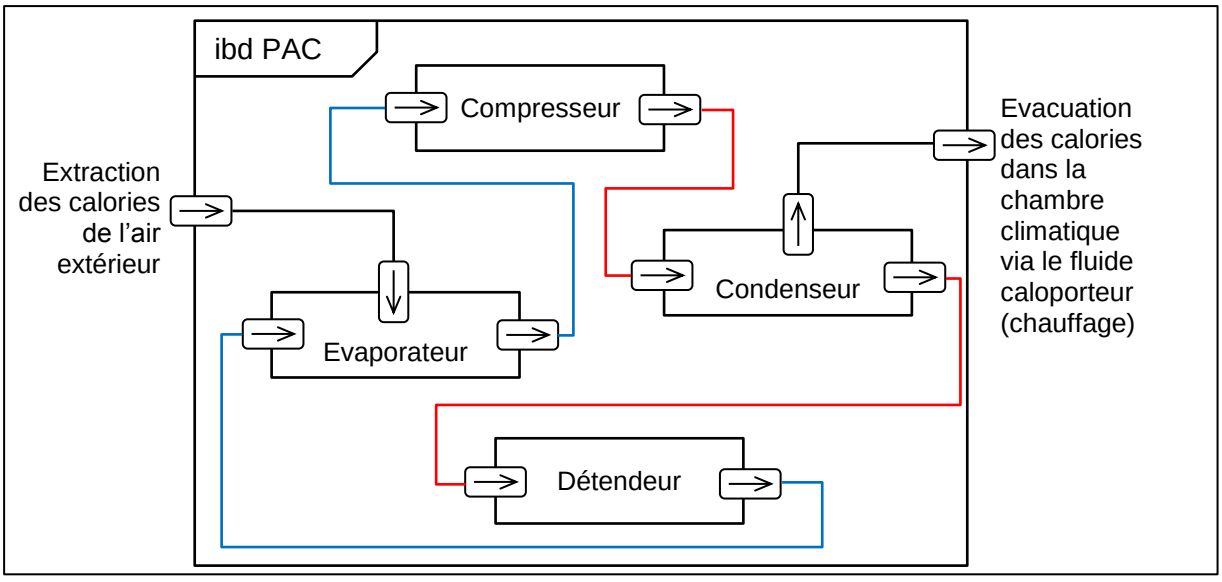


Figure 1 : *Diagramme de Bloc Interne d'une PAC en mode chauffage*

1.3 Choix du compresseur

Plusieurs familles de compresseurs existent : centrifuges ou volumétriques, à piston, à vis ou à spirales... Les critères de choix portent sur :

- la puissance à atteindre ;
- le rendement volumétrique (absence d'espaces morts) et les pertes par frottement ;
- les possibilités de modulation de puissance ;
- le niveau sonore ;
- la fiabilité, qui est fonction du nombre de pièces en mouvement ;
- l'encombrement.

On choisit ici d'étudier une PAC munie d'un compresseur Scroll, appelé aussi compresseur à spirales (Figure 2), compte tenu :

- de son rendement élevé sur une large plage de vitesses de rotation ;
- du faible nombre de pièces en rotation du mécanisme ;
- de son fonctionnement silencieux, avec un faible niveau de vibrations ;
- de sa compacité.



Figure 2 : *Pompe à chaleur York, 352 à 669 kW selon version. Un compresseur Scroll est entouré en bleu (à gauche). Zoom sur les compresseurs Scroll (à droite)*

1.4 Description du compresseur Scroll

Le compresseur Scroll utilise deux spirales de géométrie identique emboîtées l'une dans l'autre (voir Figure 3). L'une des spirales est fixe tandis que la seconde est mobile et mise en mouvement grâce à un arbre muni d'un excentrique. Le fonctionnement est décrit sur la Figure 4.

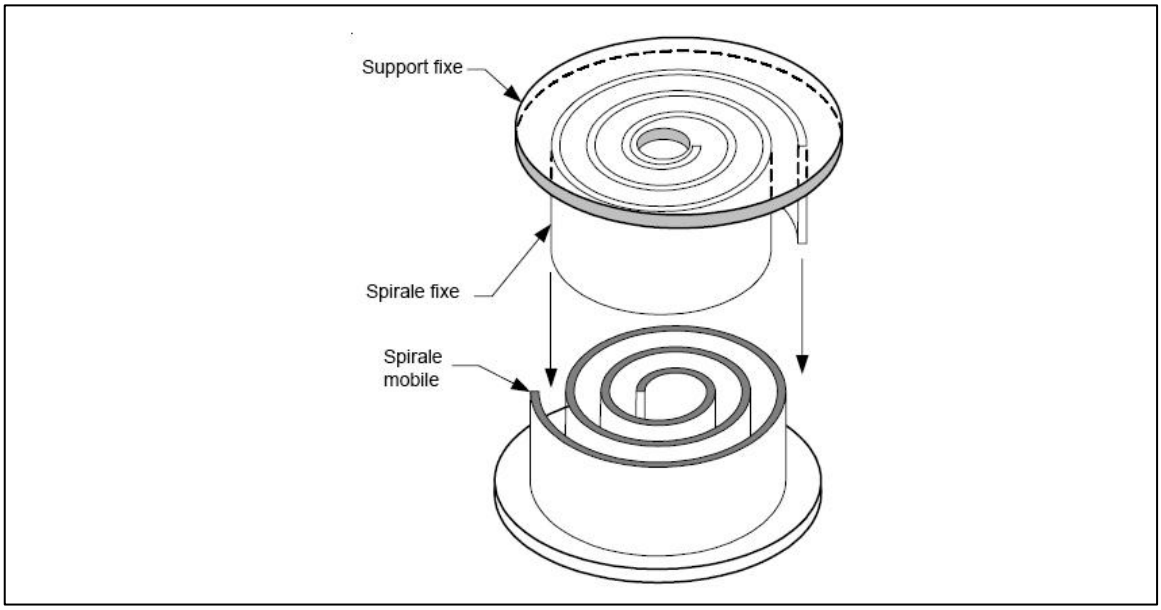


Figure 3 : *Illustration du principe de montage des 2 spirales (source : http://www.carrier.com)*

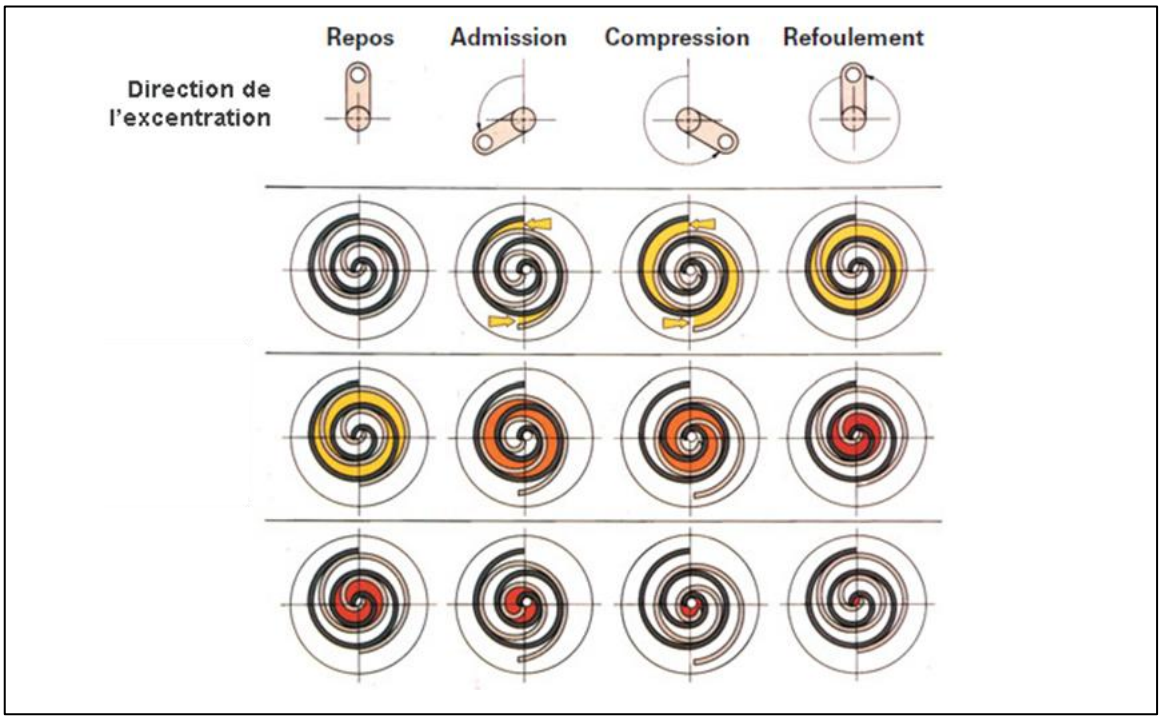


Figure 4 : *Principe de fonctionnement du compresseur sur trois révolutions, une sur chaque ligne : la spirale fixe est représentée en noir, la spirale mobile en blanc bordé de noir. Le gaz aspiré est colorié en jaune, il passe à l'orange puis au rouge au fur et à mesure de sa compression (source : document Trane, repris des Techniques de l'Ingénieur BE 9 741).*

On montre mathématiquement que, du fait de la définition géométrique des spirales, il y a une infinité de points de tangence possibles entre l'enveloppe de la spirale mobile et celle de la spirale fixe. En pratique, comme l'excentrique est imposé et de longueur fixe, le contact entre les 2 spirales n'a lieu qu'en quelques points : 2 points de contact par spire, c'est-à-dire 2 points de contact par tour de spirale (voir Figure 5).

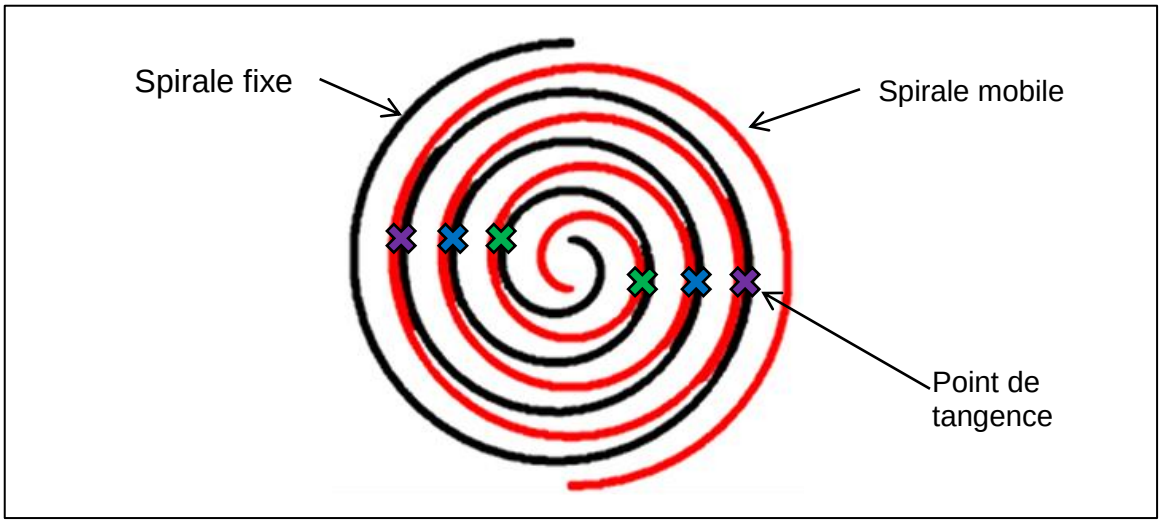


Figure 5 : *Illustration de la configuration géométrique des 2 spirales imbriquées avec les points de tangence repérés par paire (source : http://www.carrier.com)*

C'est justement cette propriété qui rend l'utilisation des spirales efficace pour la compression des gaz. L'aspiration s'effectue à la périphérie du système. En phase d'admission, deux poches de gaz se forment puis se referment : le fluide frigorigène est emprisonné. Le mouvement de la spirale mobile entraîne les gaz vers la partie centrale en réduisant progressivement le volume des poches : les gaz sont alors comprimés. Lors du refoulement, les gaz comprimés sont évacués à travers l'orifice de refoulement, au centre

de la spirale fixe, muni d'un clapet anti-retour. Il faut donc 3 tours de l'excentrique pour qu'une particule de gaz subisse un cycle complet et passe de la zone d'admission à celle du refoulement.
Les phases d'admission, compression et refoulement s'effectuent en même temps, de façon symétrique et en continu, le compresseur Scroll présentant donc *in fine* une grande régularité de fonctionnement.

1.5 Pilotage du compresseur Scroll, intérêt du fonctionnement en mode « inverter »

Le contrôle classique d'un compresseur, en « tout ou rien » par mode marche-arrêt, entraîne un mauvais rendement du compresseur et des fluctuations de la température nuisibles au confort (Figure 6). Au contraire, les compresseurs dont on fait varier la vitesse vont adapter leur puissance au plus près du besoin : quand un écart est mesuré entre le point de consigne et la température dans l'enceinte à climatiser, le système de régulation agit sur la vitesse de rotation du compresseur qui voit son débit se modifier, et par conséquent adapte la puissance de la machine. Ce mode de régulation est appelé « inverter ». Il permet un meilleur rendement et un meilleur suivi des consignes comme indiqué sur la Figure 6.

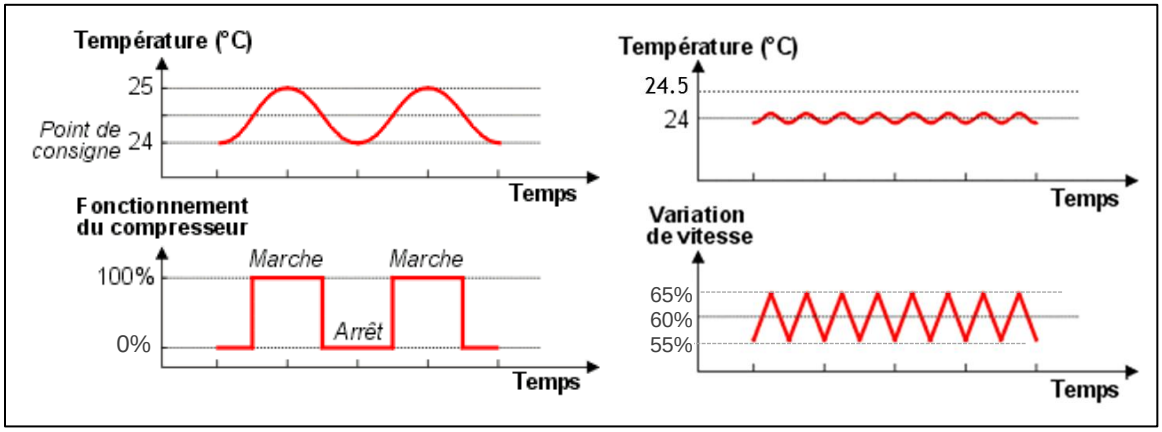


Figure 6 : *Illustration du fonctionnement en mode « tout ou rien » (à gauche) et en mode « inverter » (à droite) (source : adapté de energieplus.be)*

Le compresseur Scroll ayant par construction un bon rendement sur une large plage de vitesses de rotation, on l'utilisera ici en mode « inverter » : la puissance de la PAC sera adaptée par variation de la vitesse de rotation du compresseur. Une grande partie de l'énergie consommée par la PAC étant l'énergie électrique consommée par le moteur du compresseur, on conçoit donc une installation économe en énergie en améliorant le rendement global.

1.6 Objectifs de l'étude

L'étude va s'attacher à vérifier les performances de la PAC liées à son utilisation avec un compresseur Scroll pour chauffer une chambre d'essais climatiques. Les points spécifiques qui seront abordés dans cette étude sont repris dans le diagramme d'exigences qui suit (Figure 7). L'étude s'intéressera d'abord au compresseur lui-même, puis à sa motorisation et à l'équilibrage des pièces mobiles, enfin on verra comment asservir la température de la chambre par un pilotage en mode « inverter ».

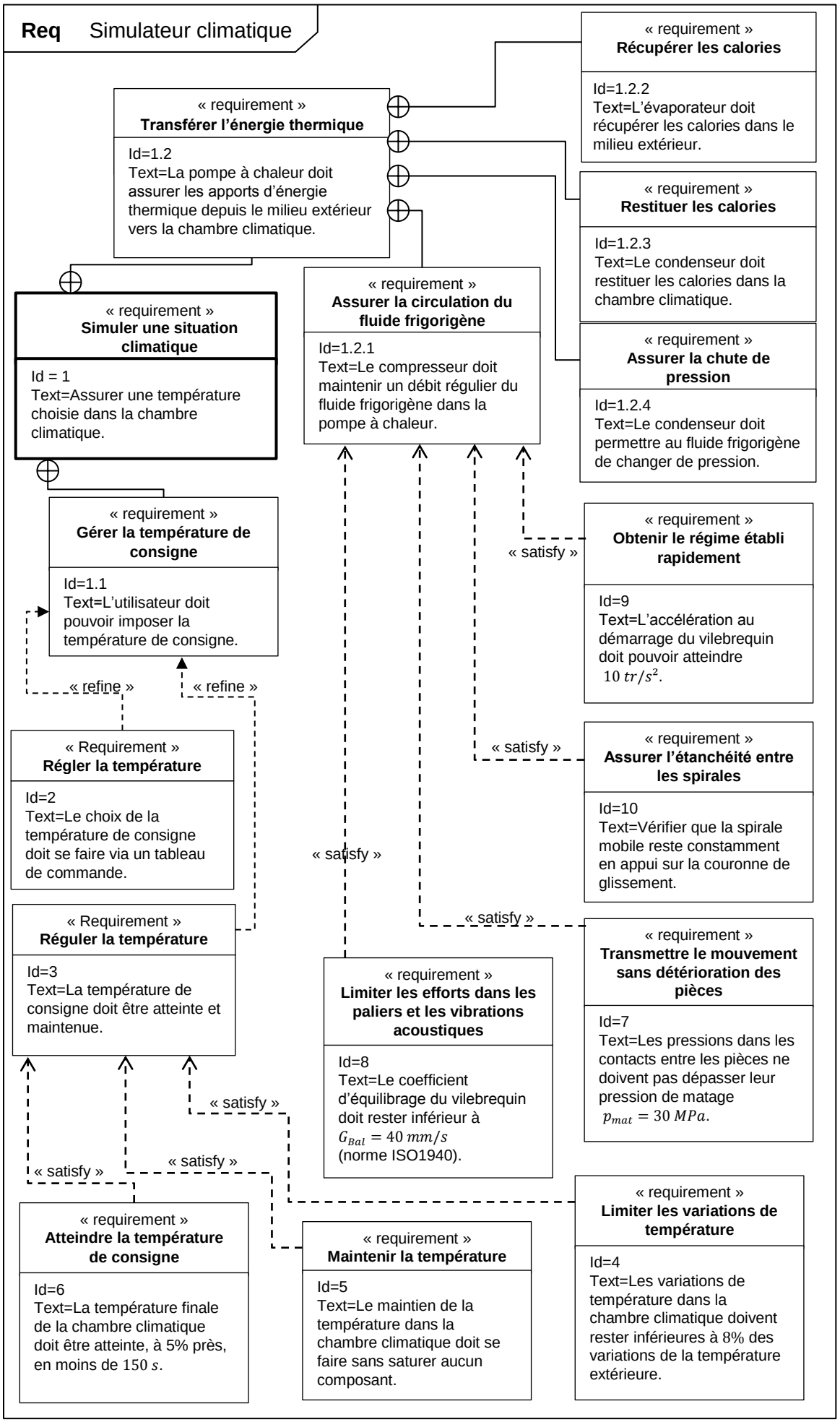


Figure 7 : *Diagramme des exigences*

Plus précisément :

- la Partie 2 sera consacrée à décrire la cinématique de compression sur laquelle repose le fonctionnement du compresseur. Le mécanisme sera étudié du point de vue de la théorie des mécanismes pour valider les choix de liaisons ;
- la Partie 3 permettra de vérifier que les efforts subis par la spirale mobile sont tels que son guidage se fait avec une bonne étanchéité entre les chambres de compression et avec le reste du mécanisme ;
- la motorisation sera choisie en Partie 4 ;
- on vérifiera dans la Partie 5 que les parties mobiles sont bien équilibrées, ce qui garantira un fonctionnement silencieux, avec peu de vibrations, et une bonne durée de vie des guidages ;
- enfin, dans la Partie 6, l'ensemble {moteur + compresseur} sera implanté dans la PAC pour asservir la température d'une chambre climatique (un modèle thermique de la chambre puis un modèle électromécanique du moteur seront élaborés, et la stratégie d'asservissement visera à atteindre une température de consigne en un temps donné puis à la maintenir malgré des perturbations extérieures).

La vérification des différents critères de fonctionnement ciblés dans cette étude ne fait intervenir qu'une partie des nombreux composants de la chambre d'essais climatiques et de la pompe à chaleur. Afin de limiter la quantité d'information et de l'organiser, les principales données nécessaires à l'étude ont été synthétisées dans les diagrammes de blocs suivants centrés respectivement sur la chambre climatique (Figure 8) et le compresseur (Figure 9).

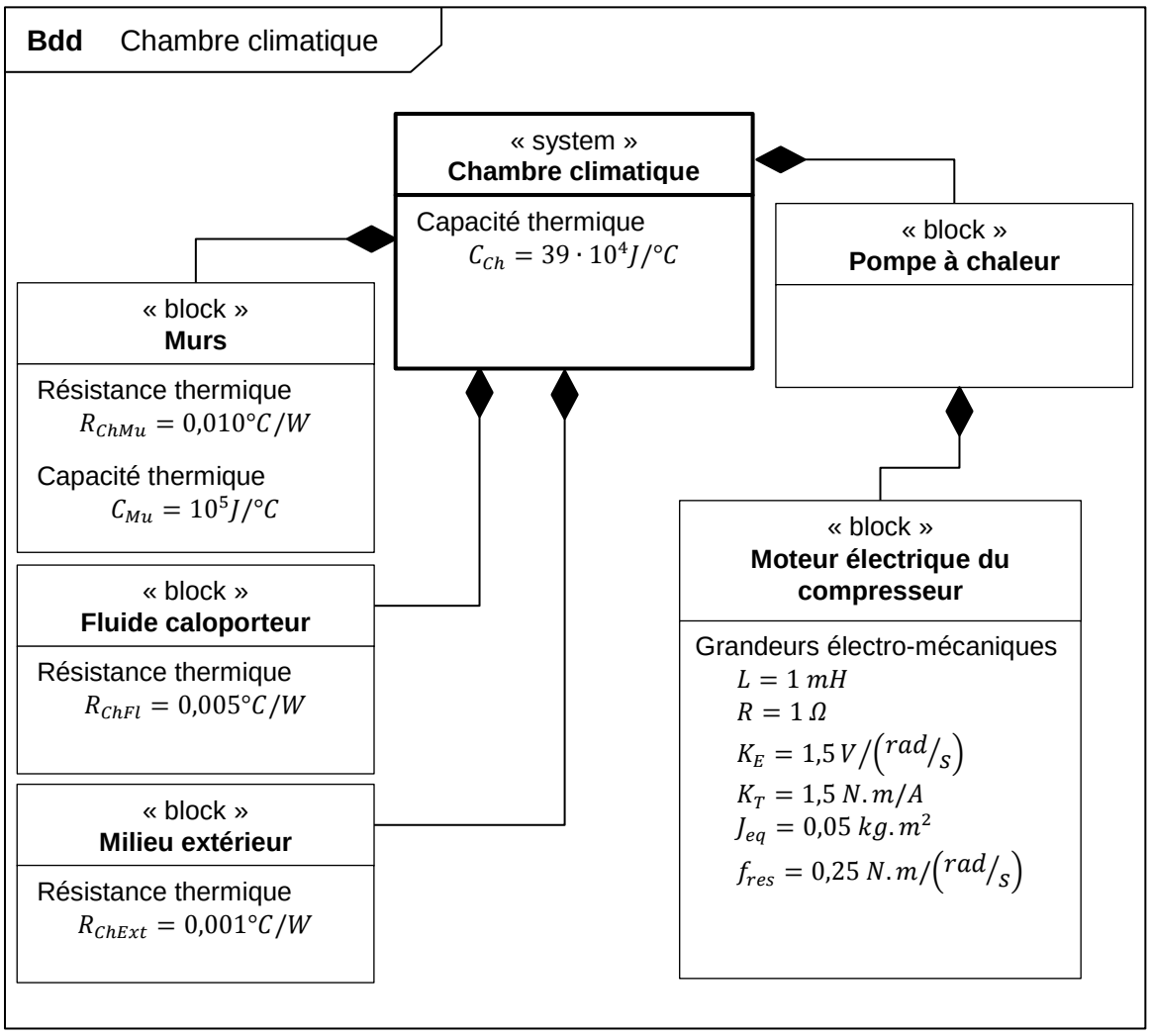


Figure 8 : *Diagramme de blocs de la chambre climatique*

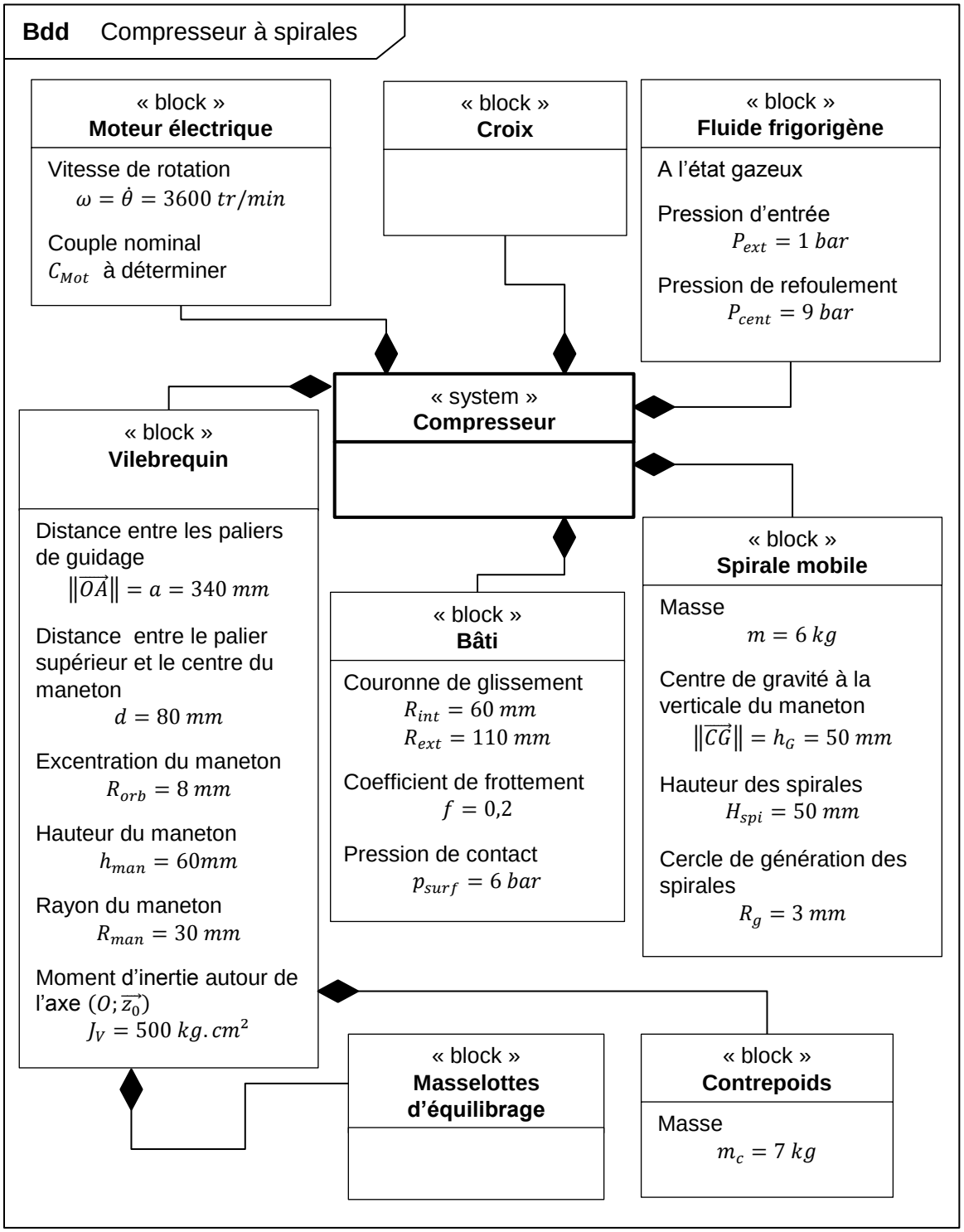


Figure 9 : *Diagramme de blocs du compresseur*

2 Étude de la cinématique de compression

L'une des caractéristiques des compresseurs à spirales est un nombre de pièces mobiles réduit par rapport aux autres technologies. Il en résulte une robustesse plus grande et des risques de panne plus faibles.

La vue éclatée présentée sur la Figure 10 permet d'identifier les différents composants du compresseur :

- le bâti fixe composé du carter extérieur, du stator du moteur électrique, de la butée médiane et de la spirale fixe placée en partie haute ;
- l'axe principal composé d'un vilebrequin, du rotor moteur, du contrepoids et de masselottes d'équilibrage ;
- la spirale mobile ;
- la croix.

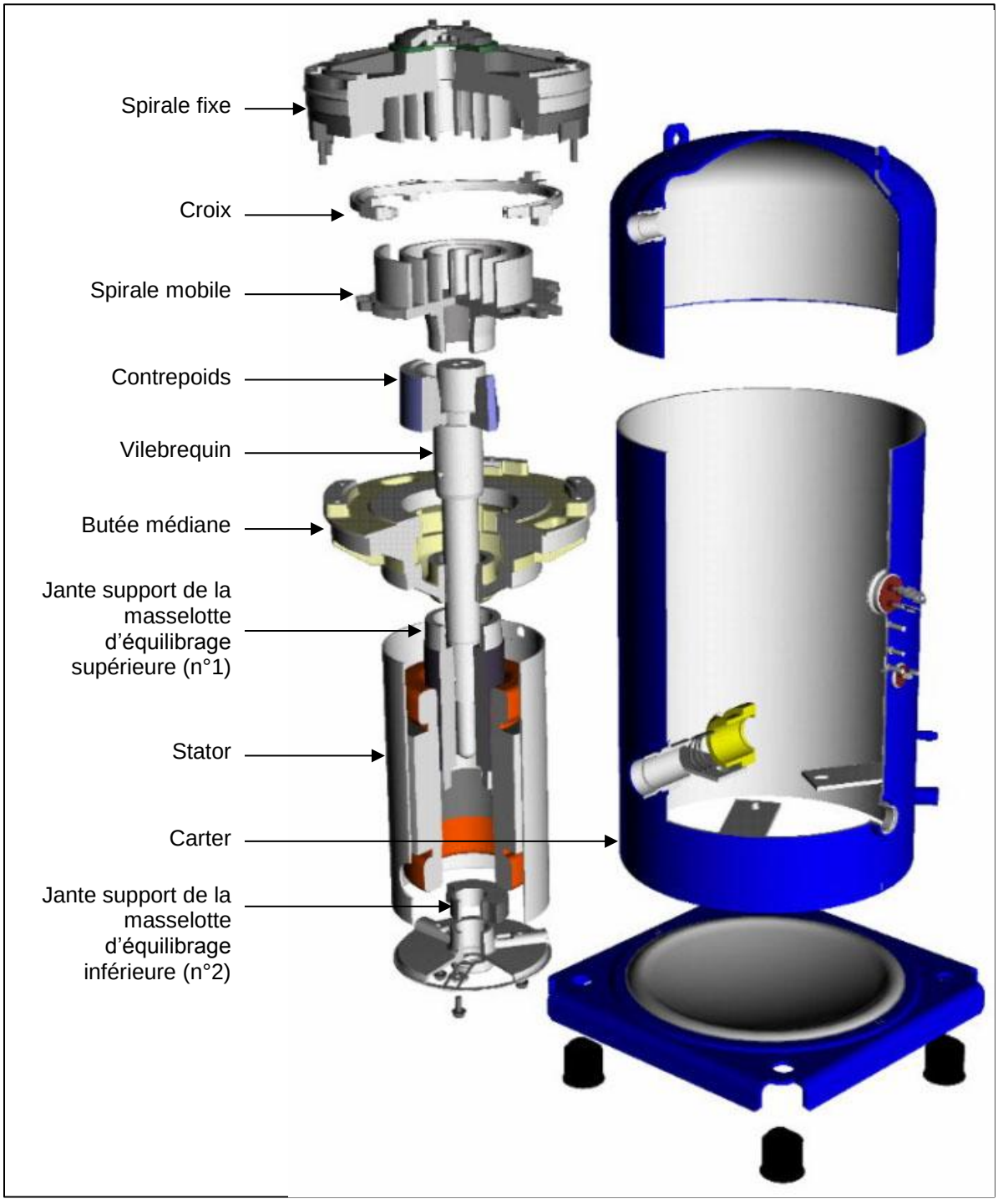


Figure 10 : *Vue éclatée d'un compresseur Scroll*

Le schéma cinématique proposé sur la Figure 11 reprend les éléments précédents en conservant les ensembles cinématiques.
N.B. : les contacts entre les spirales fixe et mobile sont négligés dans cette modélisation.

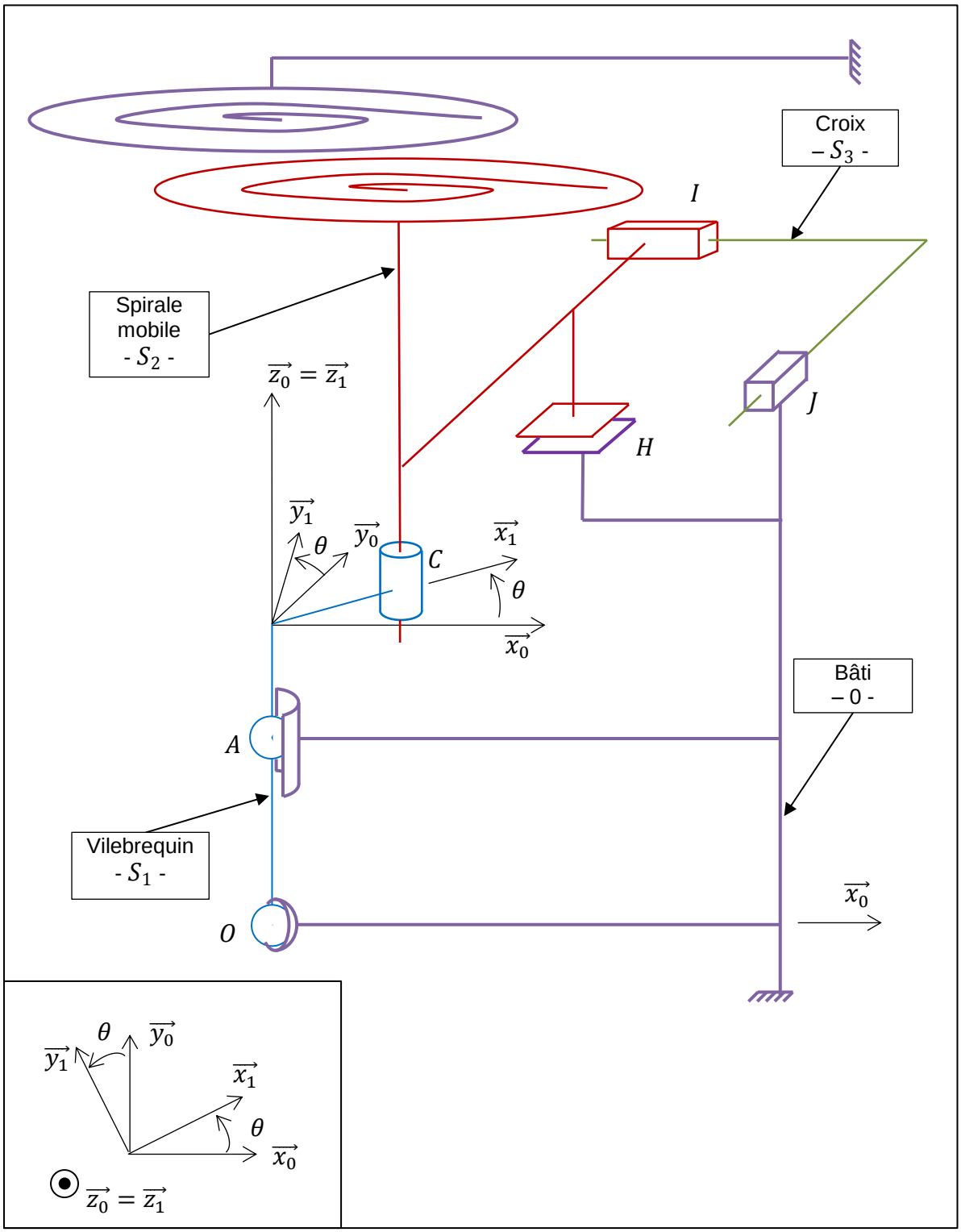


Figure 11 : *Schéma cinématique du compresseur*

Paramétrage :

- $R_0\ (O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est le repère associé au bâti 0 ;
- $R_1\ (O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ est le repère associé au vilebrequin S_1 ;
  La rotation de S_1 par rapport à 0 est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1})$;
  La vitesse de rotation est notée $\omega = \dot{\theta} = 3600\ tr/min$;
- $\overrightarrow{OA} = a \cdot \overrightarrow{z_1}$ avec $a = 340\ mm$;
- $\overrightarrow{AC} = R_{orb} \cdot \overrightarrow{x_1} + d \cdot \overrightarrow{z_1}$ avec $R_{orb} = 8\ mm$ et $d = 80\ mm$.

Liaisons supposées parfaites :
- entre le vilebrequin S_1 et le bâti 0 :
  liaison rotule de centre O ;
  liaison linéaire annulaire de centre A et d'axe $(A;\overrightarrow{z_0})$;
- entre le vilebrequin S_1 et la spirale mobile S_2 :
  liaison pivot glissant d'axe $(C;\overrightarrow{z_0})$;
- entre la spirale mobile S_2 et la croix S_3 :
  liaison glissière de direction $\overrightarrow{x_0}$;
- entre la croix S_3 et le bâti 0 :
  liaison glissière de direction $\overrightarrow{y_0}$.

Liaison non parfaite :
- entre la spirale mobile S_2 et le bâti 0 :
  liaison appui-plan avec frottement de normale $\overrightarrow{z_0}$.

2.1 Étude préliminaire d'un joint de Oldham

Objectif
Mettre en évidence les propriétés cinématiques d'un accouplement en rotation de type joint de Oldham.

Pour cette partie 2.1, toutes les liaisons sont supposées parfaites.

Le joint de Oldham est un accouplement utilisé en général entre 2 axes parallèles mais non-coaxiaux. La Figure 12 ci-après en donne les constituants de principe :
- un arbre d'entrée (noté 1) pouvant tourner autour de l'axe $(O_1;\overrightarrow{z_{P1}})$ par rapport à un bâti ;
- un arbre de sortie (noté 2) pouvant tourner autour de l'axe $(O_2;\overrightarrow{z_{P2}})$ par rapport à un bâti ;
- une pièce intermédiaire appelée en général « noix » ou « croix » (notée 3).

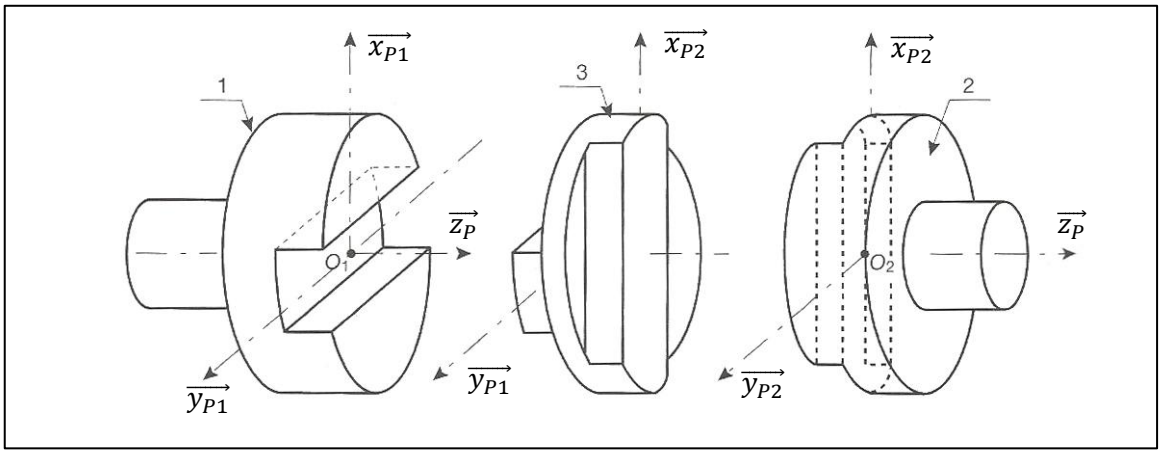


Figure 12 : *Pièces de principe d'un joint de Oldham*

La transmission de la rotation de l'arbre 1 à l'arbre 2 est rendue possible par les caractéristiques des liaisons avec la noix 3 : il est nécessaire d'avoir deux glissières orthogonales au niveau de la noix. Ainsi, on retrouve :
- une glissière de direction $\overrightarrow{y_{P1}}$ entre 1 et 3 ;
- une glissière de direction $\overrightarrow{x_{P2}}$ entre 3 et 2.

Ces 2 glissières sont par construction constamment orthogonales.

La Figure 13 ci-après représente le paramétrage de ce même joint de Oldham avec $B_0(\overrightarrow{x_{P0}},\overrightarrow{y_{P0}},\overrightarrow{z_{P0}})$ la base fixe liée au bâti 0.

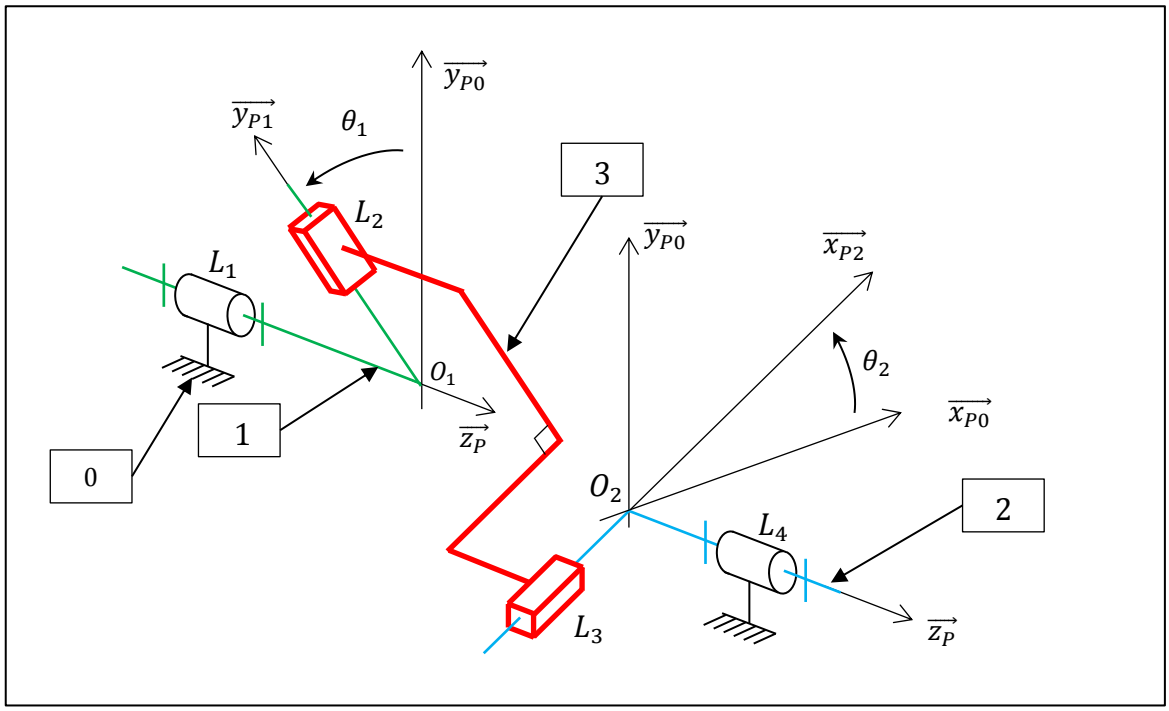


Figure 13 : *Schéma cinématique d'un joint de Oldham*

Paramétrage :

$\overrightarrow{O_1O_2} = -e \cdot \overrightarrow{x_{P0}} + h \cdot \overrightarrow{z_P}$

$\overrightarrow{L_1O_1} = l_1 \cdot \overrightarrow{z_P}$ $\qquad$ $\overrightarrow{O_1L_2} = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{y_{P1}}$

$\overrightarrow{O_2L_4} = l_2 \cdot \overrightarrow{z_P}$ $\qquad$ $\overrightarrow{L_3O_2} = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{x_{P2}}$

Les liaisons entre le bâti 0 et les pièces 1 et 2 sont toutes deux des liaisons pivots d'axes respectifs $(L_1; \overrightarrow{z_P})$ et $(L_4; \overrightarrow{z_P})$.

Question 1. Représenter la figure plane de calcul reliant la base $B_1(\overrightarrow{x_{P1}}, \overrightarrow{y_{P1}}, \overrightarrow{z_{P0}})$ à la base B_0 ainsi que celle reliant la base $B_2(\overrightarrow{x_{P2}}, \overrightarrow{y_{P2}}, \overrightarrow{z_{P0}})$ à la base B_0. Exprimer $\overrightarrow{y_{P1}}$ et $\overrightarrow{x_{P2}}$ dans la base B_0 en fonction respectivement de θ_1 et θ_2.

Question 2. Étant donné l'orthogonalité entre $\overrightarrow{y_{P1}}$ et $\overrightarrow{x_{P2}}$, montrer que $\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0$.

Question 3. Justifier, à partir du résultat précédent, que l'accouplement en rotation par joint de Oldham soit qualifié de « homocinétique en rotation », c'est-à-dire que le rapport de transmission entre la vitesse de rotation de 1 par rapport à 0, ω_1, et celle de 2 par rapport à 0, ω_2, est constant dans le temps.

Question 4. Calculer le degré d'hyperstatisme de ce modèle d'accouplement à partir des grandeurs cinématiques.

Afin de baisser l'hyperstatisme de l'accouplement, une version alternative est proposée en remplaçant les liaisons L_2 et L_3 par des liaisons pivot-glissant toujours d'axes respectifs $(O_1; \overrightarrow{y_{P1}})$ et $(O_2; \overrightarrow{x_{P2}})$.

Question 5. Vérifier, à partir d'une analyse basée sur les grandeurs statiques, que le degré d'hyperstatisme a bien diminué suite à cette modification.

Question 6. Proposer une modification permettant de rendre le système isostatique en conservant sa fonctionnalité.

2.2 Étude cinématique du compresseur Scroll complet

Objectif
Caractériser les mouvements des pièces mobiles et en particulier de la spirale mobile.

Question 7. Tracer le graphe des liaisons du système tel que modélisé sur la Figure 11 en faisant apparaître chaque liaison avec ses caractéristiques.

Question 8. Démontrer par le calcul que l'association des liaisons en O et en A entre le vilebrequin et le carter forme une liaison pivot d'axe $(A;\overrightarrow{z_0})$.

Question 9. Indiquer la valeur de l'indice de mobilité du système dans cette modélisation à partir de l'analyse du schéma cinématique. Proposer une démarche qui, sans utiliser le degré d'hyperstatisme du système, permettrait de retrouver analytiquement cette valeur.

Il est intéressant de remarquer que la croix S_3 réalise un accouplement de type joint de Oldham entre la spirale mobile S_2 et le bâti 0.

Question 10. Justifier alors que la vitesse de rotation de S_2 par rapport à 0 est nulle.

Question 11. Exprimer, dans la base B_1, la vitesse instantanée du point C appartenant à S_2 dans son mouvement par rapport à 0. Faire l'application numérique.

Question 12. Déduire des questions précédentes le type de mouvement de la spirale mobile S_2 dans son déplacement par rapport à 0 ainsi que ses qualificatifs et caractéristiques.

Dans la suite du problème, il sera admis que tous les points P de la spirale mobile S_2 ont, par rapport au bâti 0, la même vitesse $\overrightarrow{V_{P,S2/0}} = V\,\overrightarrow{y_1}$ (avec $V = 3\ m/s$).

3 Étude de l'influence de la qualité du guidage de la spirale mobile sur l'étanchéité entre chambres durant la compression

Objectif
Vérifier que le contact entre la spirale mobile et la butée médiane est assuré à chaque instant du fonctionnement en régime établi afin de garantir l'étanchéité relative des poches de gaz.

En régime établi, lorsque le moteur électrique assure une rotation à vitesse ω constante, la spirale mobile est soumise à diverses sollicitations venant des liaisons et de la compression des poches de gaz dans les spirales.
La butée médiane joue un rôle particulier dans le mouvement de la spirale mobile puisqu'elle assure le maintien axial et présente une couronne de glissement spécialement prévue pour réaliser une liaison appui-plan de qualité (voir Figure 14).

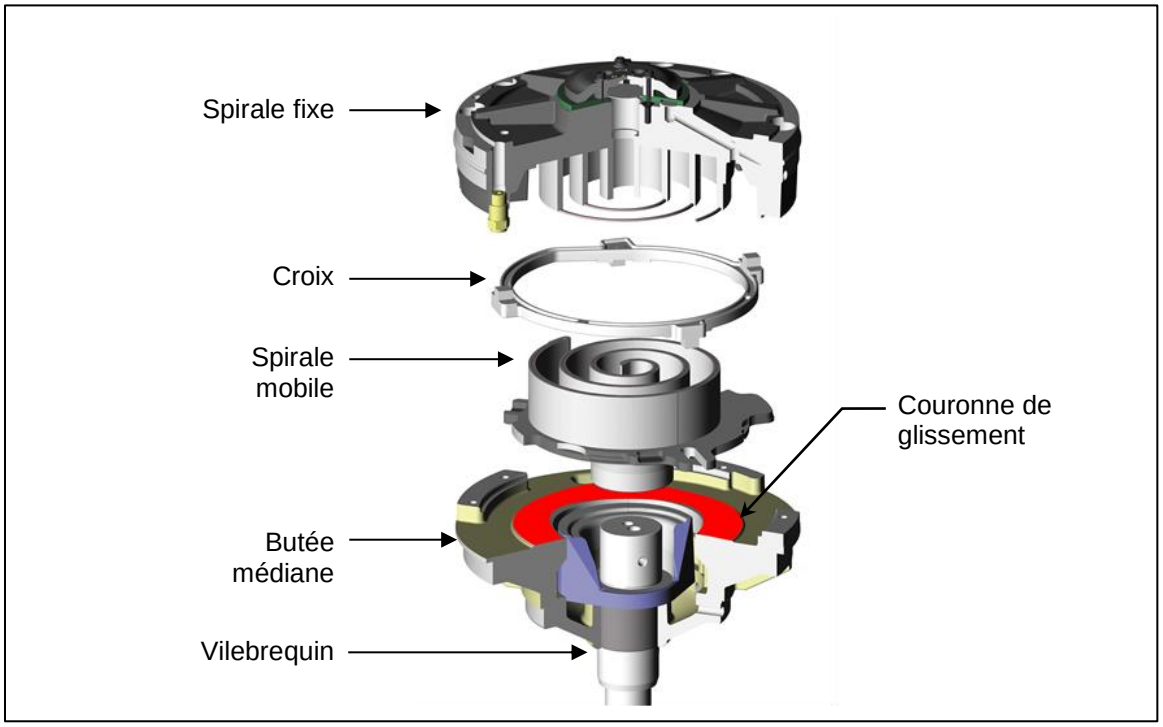


Figure 14 : *Ecorché détaillant les pièces voisines de la spirale mobile*

Il est impératif pour le bon fonctionnement que ce contact appui-plan soit vérifié à chaque instant du fonctionnement. En effet, les poches de gaz qui sont créées durant la compression (voir Figure 4) doivent absolument rester étanches les unes par rapport aux autres à chaque instant. Cette étanchéité est assurée par contact direct entre les spirales du compresseur Scroll et nécessite que ces dernières ne présentent aucun défaut d'inclinaison l'une par rapport à l'autre. C'est pourquoi il est impératif qu'il n'y ait jamais de décollement ni de basculement de la spirale mobile par rapport à la spirale fixe.

Afin de valider le dimensionnement de chaque couronne de glissement en fonction de la taille du compresseur, un critère de dimensionnement a été mis en place. Il est appelé « critère de non-décollement » et est détaillé ci-après.

Bilan des actions mécaniques sur la spirale mobile

L'étude des efforts qui s'exercent sur la spirale mobile S_2 permet de dresser le bilan suivant :

- le poids ;
  La spirale mobile est en fonte et sa masse m est approximativement de $6\ kg$.
  En reprenant le paramétrage de la Figure 11, son centre de gravité G est tel que :
  $$\overrightarrow{CG} = h_G \cdot \overrightarrow{z_1} \text{ avec } h_G = 50\ mm$$

- la force d'entrainement du vilebrequin ;
  Notée $\overrightarrow{F_V} = F_V \cdot \overrightarrow{y_1}$, la valeur F_V de cet effort étant déterminée dans la suite des calculs.
  Cette action mécanique sera exprimée en C, lieu de la liaison entre le vilebrequin et la spirale mobile. On suppose en outre qu'en ce point tous les moments transmissibles dans cette liaison sont nuls.

- la réaction de la couronne de glissement ;
  Cette réaction est due à un contact surfacique dont la forme est une couronne ayant les caractéristiques géométriques suivantes :
  - rayon intérieur : $R_{int} = 60\ mm$;
  - rayon extérieur : $R_{ext} = 110\ mm$;
  - pression de contact supposée homogène notée $p_{surf} = 6\ bar = 0{,}6\ MPa$;
  - coefficient de frottement : $f = 0{,}2$.

  Cette réaction peut être *in fine* mise sous la forme d'un glisseur en un point H appartenant au plan de contact entre la couronne de glissement et la spirale mobile :
  $$\{T_{couronne \to spirale\ mobile}\} = \begin{Bmatrix} -f \cdot F_{surf} \cdot \overrightarrow{y_1} + F_{surf} \cdot \overrightarrow{z_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_H$$
  Dans un premier temps, H n'est que partiellement connu :
  $$\overrightarrow{CH} = x_H \cdot \overrightarrow{x_1} + y_H \cdot \overrightarrow{y_1} + h_H \cdot \overrightarrow{z_1} \text{ avec } h_H = 50\ mm.$$
  L'objet de l'étude est justement de définir les lieux précis de H afin de vérifier le critère de non-décollement de la spirale mobile.

- les efforts du gaz ;
  Du fait de la compression du gaz entre les spirales fixe et mobile via différentes poches, la spirale mobile subit en réaction de la part du gaz différents efforts :
  - un effort axial F_A selon $-\overrightarrow{z_0}$ qui a tendance à écarter les spirales sous l'effet de la pression. Pour simplifier l'étude, on considèrera que F_A est constant et vaut $F_A = 3000\ N$;
  - un effort dit radial F_R selon $-\overrightarrow{x_1}$ qui vient d'une dissymétrie dans la répartition des pressions à cause de la forme des poches de gaz ;
  - un effort dit tangentiel F_T selon $-\overrightarrow{y_1}$ qui vient directement de la compression du gaz lors du mouvement. Pour simplifier l'étude, on considèrera que F_T est constant et vaut $F_T = 17\ 000\ N$.

  Le torseur du gaz sur la spirale mobile peut alors s'écrire :
  $$\{T_{gaz \to spirale\ mobile}\} = \begin{Bmatrix} -F_R \cdot \overrightarrow{x_1} - F_T \cdot \overrightarrow{y_1} - F_A \cdot \overrightarrow{z_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_K$$
  avec K le point d'application, centre de la spirale mobile, tel que :
  $$\overrightarrow{CK} = x_K \cdot \overrightarrow{x_1} + h_K \cdot \overrightarrow{z_1} \text{ avec } h_K = 100\ mm \text{ et } x_K = 4\ mm$$

Question 13. Déterminer l'expression de l'action normale à la surface F_{surf} à partir des caractéristiques du contact. Faire l'application numérique.

Les spirales sont issues de courbes géométriques appelées « involutes de cercle ». Cette géométrie induit un double alignement des points de scellement des poches, points de

contact entre les spirales qui débutent et terminent chaque poche de gaz, et ce quel que soit le nombre de boucles des spirales. Comme le montre la Figure 15 représentant l'imbrication de spirales à 2 boucles dans la situation où $\theta = 0$, les points de scellement sont toujours alignés sur 2 droites parallèles à l'excentrique et qui de plus sont tangentes aux cercles de rayon R_g, cercles de génération des involutes.

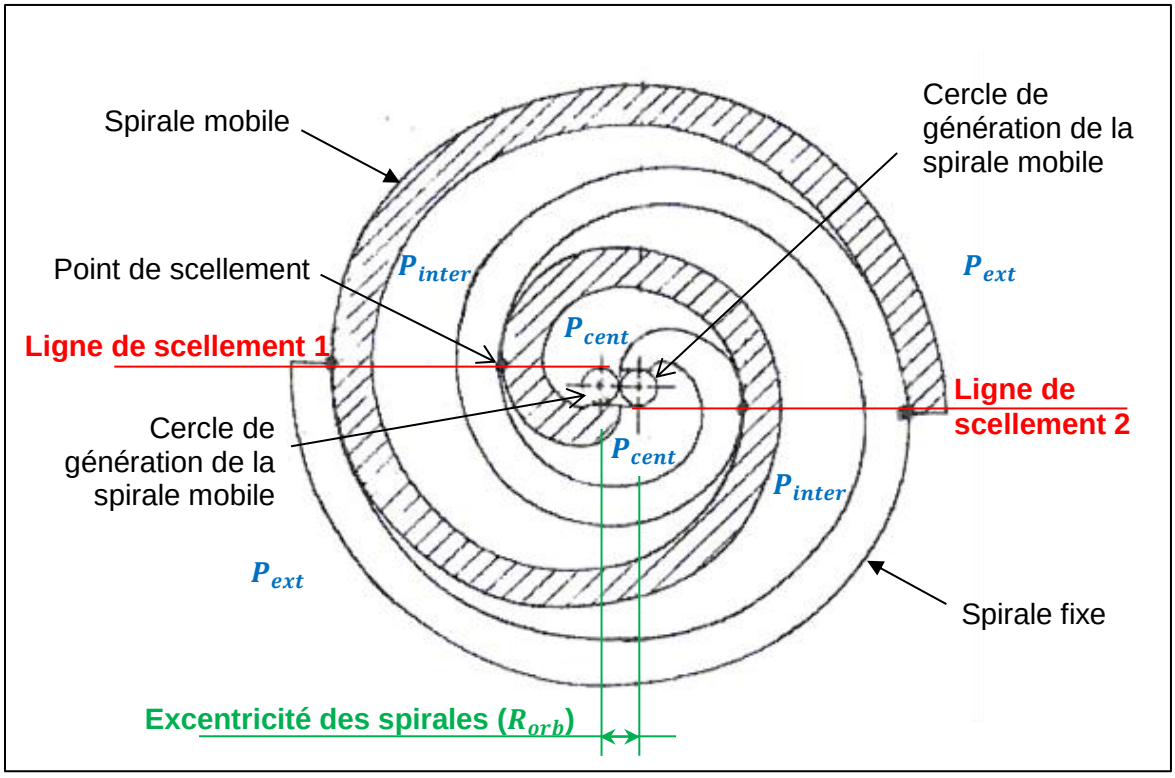


Figure 15 : *Détail des contacts et poches de gaz pour des spirales ayant 2 boucles*

La pression extérieure, notée P_{ext}, est de $1\ bar$: le gaz n'est pas encore comprimé. La pression centrale, notée P_{cent}, est de $9\ bars$: la compression du gaz est terminée et le gaz sort par l'orifice de refoulement au niveau du cercle de génération de la spirale fixe.
La pression intermédiaire, notée P_{inter}, dépend de l'instant auquel le système est observé et du nombre d'enroulements des spirales (ici 2 boucles). Elle évolue évidemment de 1 à $9\ bars$ au cours du mouvement de compression.

Question 14. En considérant que dans chaque chambre la pression est homogène, et en vous appuyant sur la Figure 15, compléter le document réponse DR1 en faisant apparaître distinctement l'état de la pression (par des couleurs différentes) tout le long de la spirale et sur chaque face.

Question 15. En s'appuyant sur les différentes surfaces identifiées à la question précédente, montrer en analysant le comportement selon $\overrightarrow{x_0}$ seulement que l'effort radial F_R sur la spirale mobile peut s'écrire :

$$F_R = 2 \cdot R_g \cdot H_{spi} \cdot (P_{cent} - P_{ext})$$

où H_{spi} est la hauteur des spirales. Faire l'application numérique avec $R_g = 3\ mm$ et $H_{spi} = 50\ mm$.

Question 16. À partir du bilan des actions mécaniques s'exerçant sur la spirale mobile et des résultats précédents, exprimer l'ensemble des torseurs déplacés au point C dans la base $B_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$:

$\{T_{poids \to spirale\ mobile}\}$; $\{T_{vilebrequin \to spirale\ mobile}\}$;
$\{T_{couronne \to spirale\ mobile}\}$; $\{T_{gaz \to spirale\ mobile}\}$.

Question 17. Calculer le torseur dynamique en C de la spirale mobile S_1 dans son mouvement par rapport au bâti 0.

3.1 Respect de la pression admissible dans la transmission de puissance

L'effort d'entraînement F_V se répartit de façon supposée homogène sur la surface de contact entre le maneton du vilebrequin et le moyeu de la spirale mobile. Cette surface de contact est assimilée à la surface latérale d'un demi-cylindre de rayon $R_{man} = 30\ mm$ et de hauteur $h_{man} = 60\ mm$.
Afin de ne pas endommager les matériaux constitutifs du maneton et de la spirale mobile dans ce contact, on impose que la pression au contact ne dépasse pas la pression de matage p_{mat} des matériaux (pression occasionnant une déformation irréversible des pièces).

Question 18. À partir des questions précédentes, choisir la projection qui à l'aide du théorème de la résultante dynamique appliqué à la spirale mobile permet d'obtenir F_V. Écrire alors l'expression de F_V et faire l'application numérique.

Question 19. Déterminer l'expression de la pression dans le contact en fonction de $R_{man}, h_{man}\ et\ F_V$.

Question 20. La valeur de p_{mat} étant fixée à $p_{mat} = 30\ MPa$, faire l'application numérique afin de vérifier si la pression de matage admissible est respectée et donc si l'exigence correspondante est vérifiée.

3.2 Respect du non-décollement de la spirale mobile

Tant que le point H reste à l'intérieur du cercle de rayon R_{ext}, la spirale mobile est considérée comme stable et la conception est validée. Si à l'inverse, H est hors du cercle, la conception est à reprendre puisque cela impliquerait que la spirale mobile tend à basculer au moins temporairement durant le mouvement.

Question 21. À partir du théorème du moment dynamique appliqué à la spirale mobile, déterminer les expressions régissant les coordonnées du point H.

Question 22. Calculer numériquement les coordonnées de H. Conclure quant au respect du critère de non-décollement dans le modèle étudié.

4 Choix de la motorisation du compresseur

Objectif
Sélectionner la référence de moteur adaptée aux caractéristiques de fonctionnement attendues.

L'un des points spécifiques du compresseur équipant la pompe à chaleur est le petit nombre de pièces mobiles : un vilebrequin, une spirale mobile, un contrepoids et la croix. Le choix de la motorisation a donc un intérêt tout particulier puisque celle-ci peut être dimensionnée de manière très fine et ainsi limiter le surdimensionnement.
Le moteur recherché doit respecter les critères de fonctionnement cinématique et de puissance imposés au niveau des exigences du cahier des charges. Ses caractéristiques sont notées ω_{mot} pour sa vitesse de rotation nominale et C_{mot} pour son couple nominal.

Le vilebrequin a une géométrie relativement simple. Il sera pour cette partie assimilé à l'association de 2 cylindres non-coaxiaux en acier pour son corps, sur laquelle est fixé un cylindre creux en cuivre correspondant au bobinage du rotor moteur. La Figure 16 reprend les quelques éléments de géométrie définissant justement le vilebrequin tel que décrit précédemment.
Le centre de gravité G_V du vilebrequin seul, au vu de la géométrie, est considéré comme appartenant à l'axe $(O,\overrightarrow{z_1})$ tel que : $\overrightarrow{OG_V} = L_G \cdot \overrightarrow{z_1}$ avec $L_G = 200\ mm$.

Question 23. Donner la forme de la matrice d'inertie du vilebrequin associé au bobinage exprimée en G_V. Seule la forme de la matrice est à donner et justifier, l'expression détaillée de chaque terme de la matrice n'est pas demandée.

Dans la suite de cette partie, il est admis que la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble exprimée au point G_V est telle que : $I(G_V) = \begin{bmatrix} A_V & 0 & 0 \\ 0 & B_V & 0 \\ 0 & 0 & J_V \end{bmatrix}_{(G_V,\overrightarrow{x1},\overrightarrow{y1},\overrightarrow{z1})}$

Question 24. Discuter des simplifications qui ont été faites pour aboutir à cette forme de matrice.

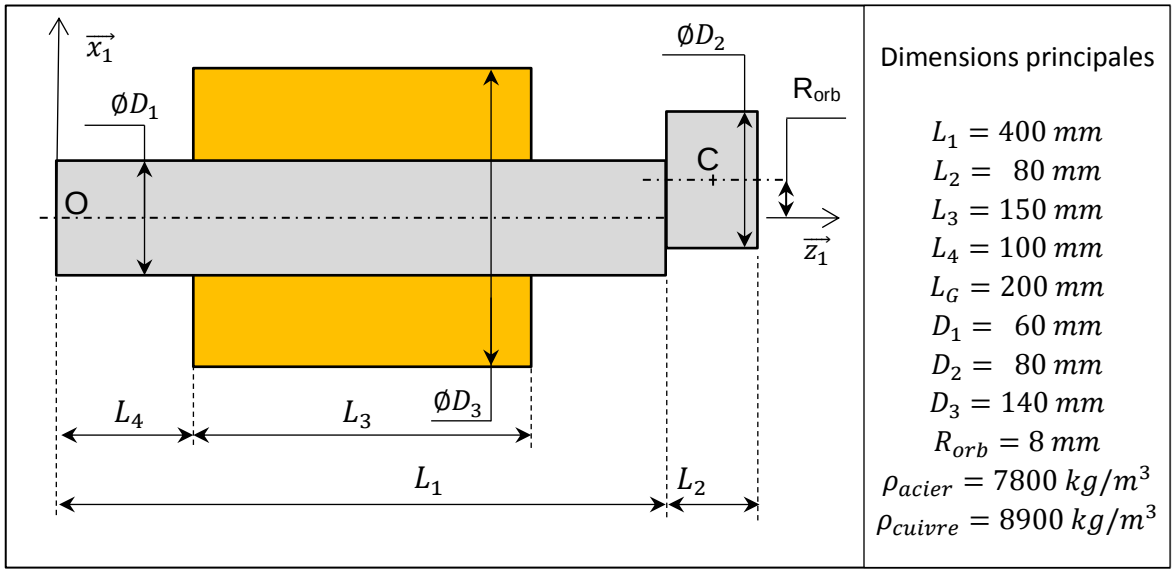


Figure 16 : *Géométrie simplifiée du vilebrequin (contrepoids non-représenté)*

La spirale mobile, en fonte, a une masse $m = 6\ kg$, tandis que les masse et inertie de la croix sont négligées.
Le contrepoids, en fonte également, a une masse $m_C = 7\ kg$. Il sera pour cette partie considéré comme une masse ponctuelle située en G_C tel que : $\overrightarrow{CG_C} = -2 \cdot R_{orb} \cdot \overrightarrow{x_1}$. Son rôle est de contrebalancer en grande partie les effets induits par le déplacement de la spirale mobile au cours du mouvement, ce qui explique les similitudes dans les grandeurs physiques et le paramétrage vis-à-vis de la spirale mobile.

Question 25. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble des pièces mobiles {vilebrequin + spirale mobile + contrepoids + croix} ramenée sur l'arbre moteur dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen R_0 en fonction de m, m_C, R_{orb}, J_V et ω.

Question 26. Déterminer les expressions de toutes les puissances galiléennes des actions mécaniques intervenant sur l'ensemble mobile {vilebrequin + spirale mobile + contrepoids + croix}.

Question 27. À partir des résultats des questions précédentes et en appliquant les théorèmes adéquats, déterminer l'expression et la valeur numérique du couple moteur nécessaire pour assurer une accélération au démarrage du vilebrequin de $10\ tr/s^2$.

Question 28. Choisir alors en fonction des questions précédentes la référence la plus adaptée dans l'extrait de catalogue joint en annexe 1.

5 Équilibrage statique et dynamique de l'ensemble des parties mobiles

Objectif
Vérifier que les parties mobiles sont bien équilibrées, ce qui garantira un fonctionnement silencieux, avec peu de vibrations, et une bonne durée de vie des guidages.

Le rotor S_1 du compresseur est constitué de l'arbre, de l'aimant permanent du moteur électrique et d'un contrepoids situé à l'opposé de la partie excentrique de l'arbre et en retrait axialement (le contrepoids est visible sur la Figure 10). Son rôle est de contrebalancer l'essentiel des effets dynamiques de la spirale mobile et de l'excentrique. En effet, la répartition des masses mobiles est telle que, sans cette disposition particulière, le centre de gravité de l'ensemble mobile serait trop éloigné de l'axe de rotation, ce qui entraînerait des effets de balourd très importants et dangereux pour l'intégrité du compresseur.
Cependant, malgré le soin apporté à la fabrication, les pièces ne sont jamais parfaites. En particulier, l'ajout d'un contrepoids de série ne suffit pas à amener le centre de gravité du rotor {arbre + aimant + contrepoids} suffisamment près de l'axe de rotation. De plus, et c'est ce qui est encore plus critique, cet axe n'est pas axe principal d'inertie car le contrepoids est forcément décalé axialement par rapport à la spirale mobile. Lors de la rotation de l'arbre, on peut s'attendre à l'apparition de forces de balourd qui vont fatiguer les guidages et générer des vibrations sources de bruit. Il est donc indispensable d'équilibrer l'ensemble mobile à l'aide d'un banc d'équilibrage.
Cette opération consiste à positionner 2 masselottes de part et d'autre de l'arbre : un banc dédié analyse le défaut d'équilibrage et définit les masses des masselottes à ajouter ainsi que leur position angulaire. L'objectif est ici de définir une procédure d'équilibrage pour satisfaire aux normes en vigueur.

Un compresseur a été aménagé en banc d'essai d'équilibrage. Il a été modifié pour faciliter le montage – démontage du rotor. De plus les paliers ont fait l'objet d'une nouvelle conception pour permettre la mesure des efforts radiaux transmis par l'ensemble mobile au bâti. Ils sont maintenant en liaison élastique avec le bâti et, sur chaque palier, deux lames flexibles rendent possible la translation du palier dans la direction $\overrightarrow{x_0}$. Cette translation est arrêtée par deux capteurs qui enregistrent ainsi les composantes horizontales des résultantes d'actions mécaniques dans les paliers. Ces relevés sont synchronisés avec l'enregistrement de la position angulaire de l'arbre.

Le paramétrage est défini sur les Figures 17 et 18. Le palier instrumenté inférieur est détaillé sur la Figure 19.

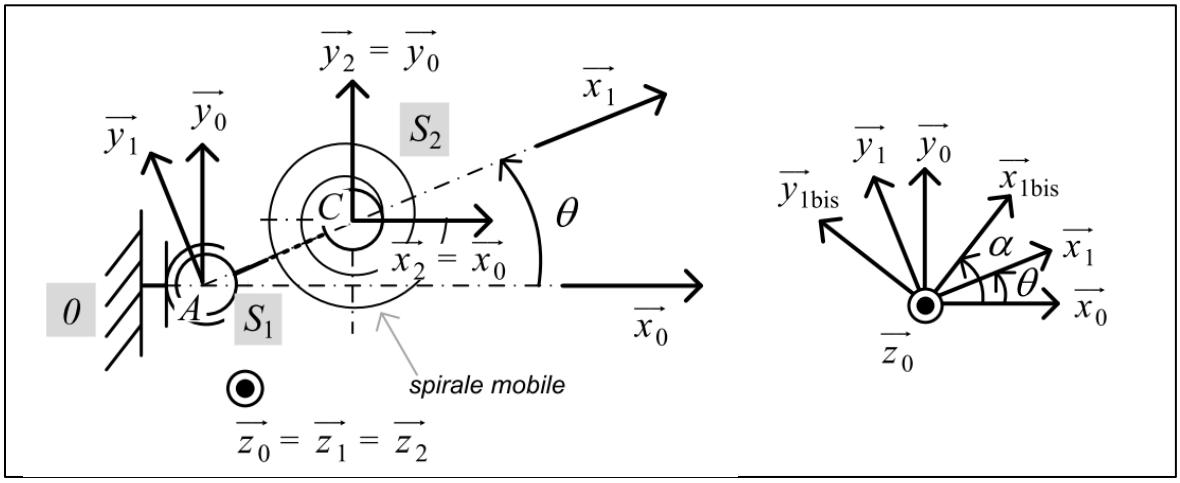


Figure 17 : *Schéma cinématique simplifié. Vue de dessus du banc d'équilibrage (la spirale mobile est représentée, à gauche, par la spirale centrée sur le point C)*

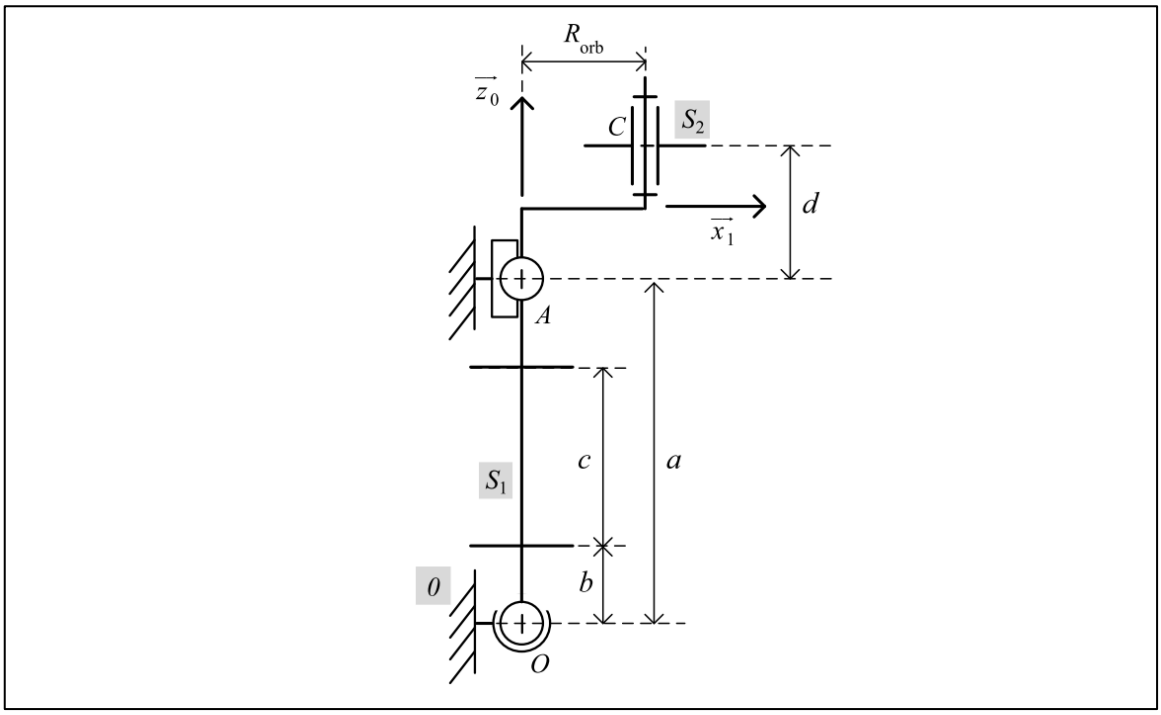


Figure 18 : *Schéma cinématique simplifié. Vue de côté du banc d'équilibrage*

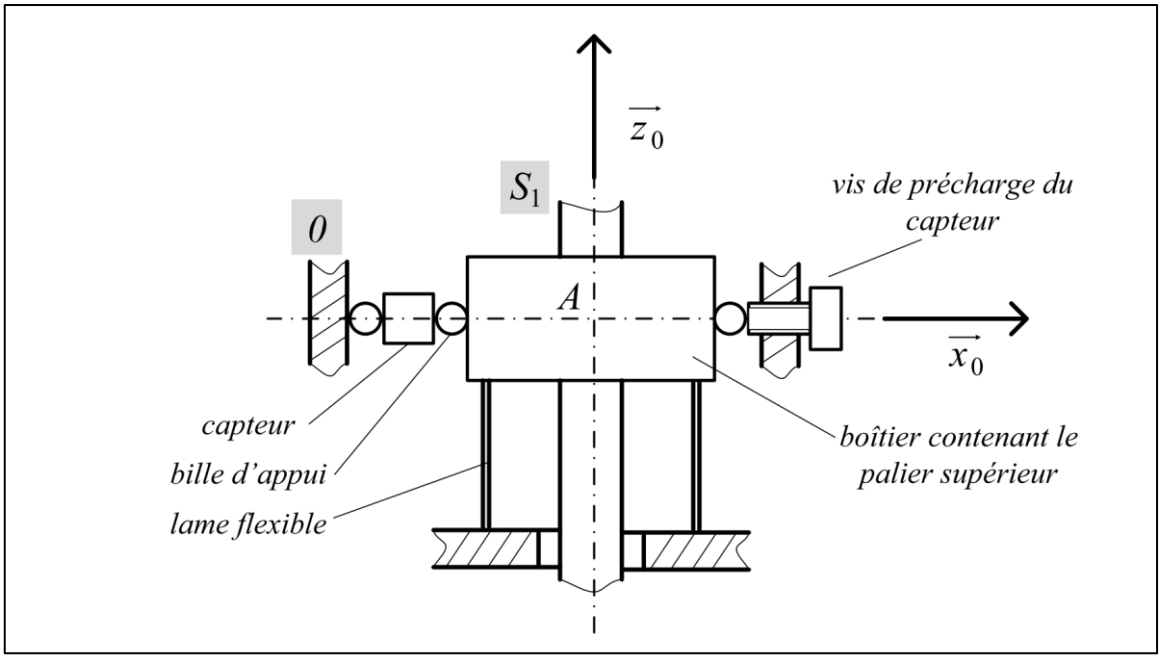


Figure 19 : *Détail d'un des paliers du banc d'équilibrage. Schéma de principe de l'instrumentation donnant accès à l'effort radial selon* $\overrightarrow{x_0}$

R_0 $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est lié au bâti 0 ($\overrightarrow{z_0}$ verticale ascendante). R_1 $(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_0})$ est lié au rotor. θ est l'angle entre $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{x_1}$, avec $\dot{\theta}$=constante (vitesse de rotation). R_{1bis} $(O, \overrightarrow{x_{1bis}}, \overrightarrow{y_{1bis}}, \overrightarrow{z_0})$ est aussi lié au rotor et sert à repérer angulairement le centre de gravité du rotor. On pose α (constante inconnue) l'angle entre $\overrightarrow{x_1}$, et $\overrightarrow{x_{1bis}}$. R_2 $(B, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_0})$ est lié à la spirale mobile (avec $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_2} = \overrightarrow{y_0}$).

Propriétés de l'ensemble de solides S_1 {arbre + aimant + contrepoids}

La position du centre de gravité G_1 du rotor S_1 est donnée par $\overrightarrow{OG_1} = h\,\overrightarrow{z_0} + \rho\,\overrightarrow{x_{1bis}}$ (h et ρ étant des inconnues). S_1 est entraîné en rotation par le moteur. Le torseur d'actions mécaniques du moteur sur le rotor a :

- comme résultante $\overrightarrow{R_1} = \vec{0}$;
- comme moment en O : $\overrightarrow{M_1}(O) = C_m \cdot \overrightarrow{z_0}$.

S_1 a pour masse m_1. Sa matrice d'inertie I_1 n'est pas diagonale à cause de la présence du contrepoids et des imprécisions de fabrication :

$$I_1(G_1) = \begin{bmatrix} A_1 & -D_1 & -E_1 \\ -D_1 & B_1 & -F_1 \\ -E_1 & -F_1 & C_1 \end{bmatrix}_{G_1,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0}}$$

Propriétés du solide S_2 (spirale mobile)

La spirale S_2, de masse m_2, a pour centre de gravité G_2 dont la position est donnée par $\overrightarrow{OG_2} = (a+d)\,\overrightarrow{z_0} + R_{orb}\overrightarrow{x_1}$. Le centre de gravité G_2 de S_2 est supposé se trouver sur l'axe de l'excentrique (la géométrie du plateau sur lequel est soudée la spirale proprement dite compense les asymétries de masse de cette spirale, de plus, chaque spirale a été retouchée individuellement pour garantir cette propriété). La matrice d'inertie de S_2 est de la forme :

$$I_2(G_2) = \begin{bmatrix} A_2 & -D_2 & -E_2 \\ -D_2 & B_2 & -F_2 \\ -E_2 & -F_2 & C_2 \end{bmatrix}_{G_2,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_0}}$$

De plus, on note :
- $\overrightarrow{R_O} = X_O\,\overrightarrow{x_0} + Y_O\,\overrightarrow{y_0} + Z_O\,\overrightarrow{z_0}$ la résultante des efforts du palier inférieur en O sur S_1 ;
- $\overrightarrow{R_A} = X_A\,\overrightarrow{x_0} + Y_A\,\overrightarrow{y_0}$ la résultante des efforts du palier supérieur en A sur S_1.

5.1 Détermination des caractéristiques de l'ensemble $\{S_1 + S_2\}$ non-équilibré

La spirale mobile est montée à l'extrémité de l'arbre. S_1 est en rotation à vitesse constante $\dot{\theta}$. L'appareil de mesure n'est capable d'enregistrer l'effort au niveau des deux paliers que dans la direction $\overrightarrow{x_0}$: on obtient ainsi X_O et X_A. On cherche à déterminer X_O et X_A en fonction des caractéristiques d'inertie des deux solides.

Question 29. Déterminer la résultante dynamique $\overrightarrow{R_{S/R_0}^{dyn}}$ du système $S = \{S_1 + S_2\}$. Le résultat sera mis sous la forme :

$$\overrightarrow{R_{S/R_0}^{dyn}} = X_{1bis}\,\overrightarrow{x_{1bis}} + X_1\,\overrightarrow{x_1}.$$

Question 30. Déterminer le moment dynamique $\overrightarrow{\delta_{O,S/R_0}^{dyn}}$ en O du système $S = \{S_1 + S_2\}$. Le résultat sera mis sous la forme :

$$\overrightarrow{\delta_{O,S/R_0}^{dyn}} = L_1\,\overrightarrow{x_1} + M_1\,\overrightarrow{y_1} + M_{1bis}\,\overrightarrow{y_{1bis}}.$$

Question 31. Déterminer les moments au point O des efforts dans les paliers situés en O et A. Ils seront exprimés dans la base R_0.

Question 32. Les mesures d'effort étant faites selon la direction $\overrightarrow{x_0}$, écrire en justifiant votre choix les 2 équations scalaires issues du principe fondamental de la dynamique utiles au dépouillement des essais. On précisera le système isolé.

5.2 Exploitation des mesures d'efforts sur les paliers

Les mesures donnent les évolutions suivantes des efforts dans les paliers (graphe sur la Figure 20). On va utiliser ces relevés pour identifier les défauts d'équilibrage, c'est-à-dire les propriétés d'inertie du système {arbre + spirale mobile} nécessaires à son équilibrage.

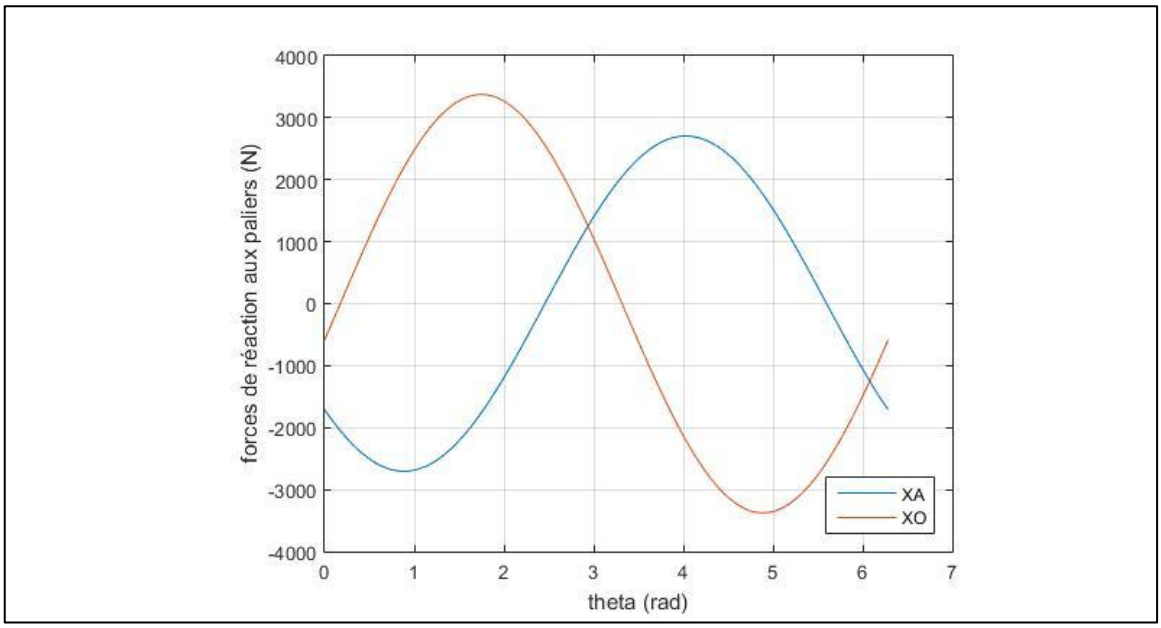


Figure 20 : *Graphe de valeurs issues de l'essai d'équilibrage mené pour* $\dot{\theta} = 3600tr/min$

Question 33. A partir des résultats d'essais, proposer une méthode d'identification des paramètres ρ et α du centre d'inertie G_1 du rotor S_1, ainsi que des produits d'inertie E_1 et F_1.

L'identification a été menée. Elle a conduit aux résultats suivants : $\boldsymbol{\rho = 1,50\ mm}$; $\boldsymbol{\alpha = 166,01}$; $\boldsymbol{E_1 = 8,961 \cdot 10^3\ kg.mm^2}$; $\boldsymbol{F_1 = -0,806 \cdot 10^3\ kg.mm^2}$.

Question 34. Donner un ordre de grandeur numérique du coefficient G_{bal} d'équilibrage du système (produit de la vitesse de rotation en rad/s par la distance du centre de gravité à l'axe de rotation en mm) de l'ensemble tournant à vitesse nominale. Cette valeur dépasse-t-elle la valeur G_{bal} préconisée par la norme ISO1940 pour les rotors de moteurs électriques ? Conclure.

5.3 Détermination des masselottes d'équilibrage

Le rotor est équilibré avec deux masselottes repérées par les indices S_3 (masselotte inférieure) et S_4 (masselotte supérieure), assimilables à des points matériels M_3 et M_4 de masse m_3 et m_4, situées de part et d'autre de l'arbre, de sorte que :

$$\overrightarrow{OM_3} = b\,\overrightarrow{z_0} + r\,\overrightarrow{u_3} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM_4} = c\,\overrightarrow{z_0} + r\,\overrightarrow{u_4}$$

Données :
r : rayon sur lequel sont disposées les masselottes ;
b : position axiale de la masselotte 3 ;
c : position axiale de la masselotte 4 ;
β_3 : angle entre $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{u_3}$;
β_4 : angle entre $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{u_4}$.
On note $\overrightarrow{v_3}$ et $\overrightarrow{v_4}$ les vecteurs perpendiculaires à $\overrightarrow{z_0}$ et à, respectivement $\overrightarrow{u_3}$ et $\overrightarrow{u_4}$.

Question 35. Exprimer la condition vectorielle à satisfaire pour que le système composé des solides $S_1 + S_2$ et des deux masselottes d'équilibrage ait son centre de gravité sur l'axe de rotation (équilibrage statique). Projeter sur $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$.

Question 36. Écrire la condition de nullité des moments dynamiques chargeant les paliers du système (équilibrage dynamique). Projeter sur $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$.

La résolution du système d'équations relatif à la détermination des masselottes d'équilibrage a été menée. Elle a conduit aux résultats suivants : $\boldsymbol{\beta_3 = 14,7°}$; $\boldsymbol{m_3 = 0,43\ kg}$; $\boldsymbol{\beta_4 = -158,9°}$; $\boldsymbol{m_4 = 0,81\ kg}$.

Question 37. Commenter ces résultats, à l'aide de la Figure 21, du point de vue de la faisabilité du montage des masselottes de part et d'autre du bobinage du rotor (problématique d'encombrement).

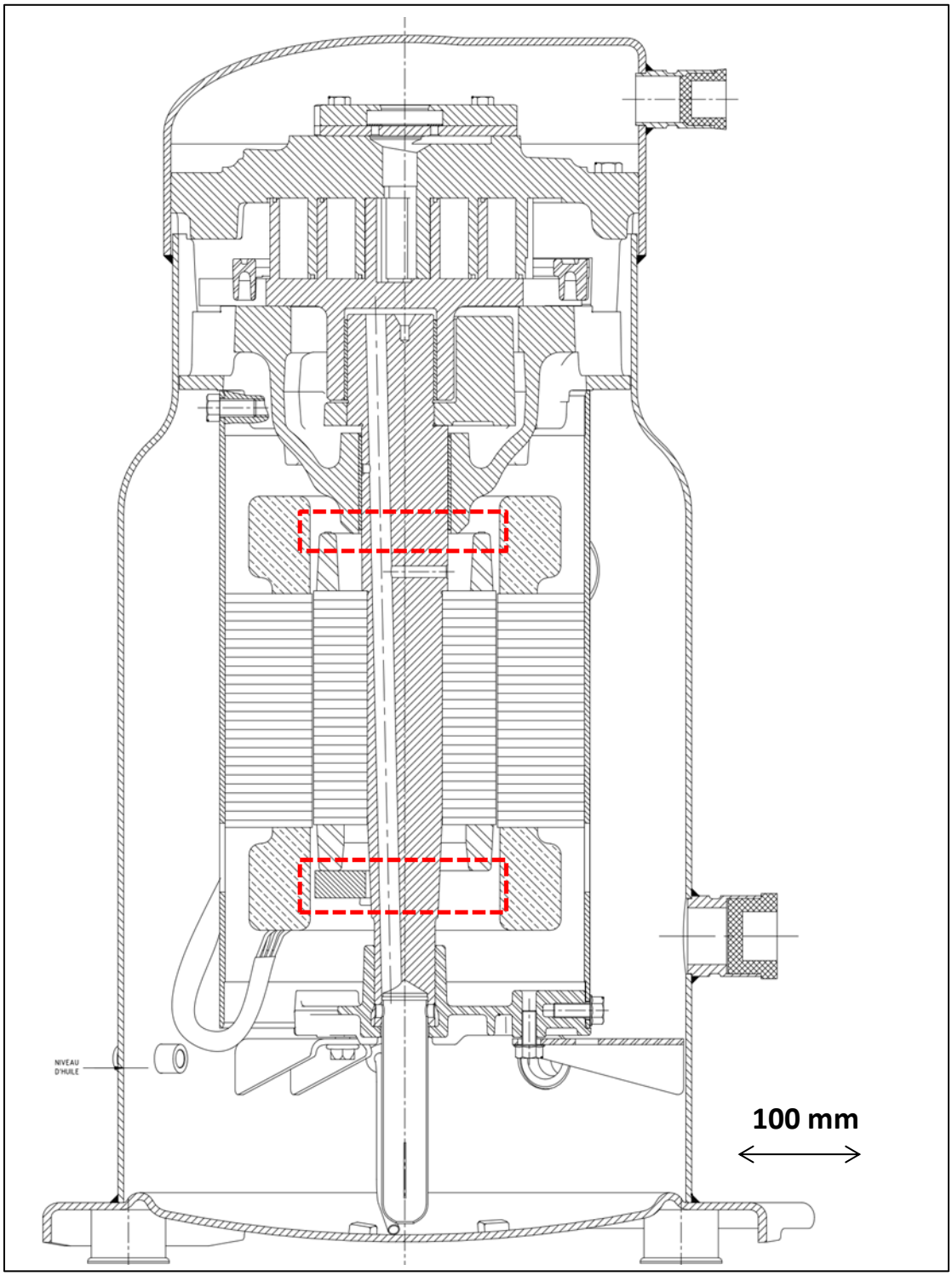


Figure 21 : *Dessin d'ensemble du compresseur. Les zones d'intégration des masselottes sur le rotor sont repérées par les cadres rouges pointillés*

6 Asservissement de la température d'une chambre climatique équipée de la PAC à compresseur Scroll

6.1 Présentation du contexte

La PAC équipée du compresseur Scroll étudié dans les parties précédentes est maintenant installée dans un laboratoire d'essais climatiques. Elle sert à contrôler la température d'une chambre où sont reproduites les conditions environnementales rencontrées en opération par les équipements testés (véhicules automobiles, ferroviaires, systèmes aéronautiques et spatiaux, composants électroniques…).
Le compresseur Scroll qui l'équipe étant adapté à un pilotage en « inverter », la vitesse de rotation va être modulée pour adapter la génération de chaleur au plus près des besoins exprimés par la consigne.
En mode « poursuite », l'essai dimensionnant pour la PAC est celui dit VRT, de variation rapide de température, où une chambre climatique voit sa température varier brusquement en un temps limité. En mode « régulation », la PAC doit permettre de maintenir une température d'essai quelles que soient les perturbations extérieures.

6.2 Modélisation du système à asservir

Objectif
Le but de cette partie est de construire un modèle des apports thermiques de la PAC à la chambre climatique et des échanges de la chambre climatique avec son environnement.

Les variables d'entrée décriront la consigne de tension donnée au moteur de la PAC et l'évolution de la température extérieure, tandis que la variable de sortie sera la température de l'air dans la chambre. La comparaison des temps caractéristiques des différents phénomènes thermiques et électromécaniques permettra de ne retenir que les phénomènes les plus significatifs dans un modèle simplifié du système. Ce dernier sera asservi dans les parties suivantes.

Notations

Les grandeurs temporelles $z(t)$ et leurs transformées de Laplace $Z(p)$ seront désignées par le même symbole respectivement en minuscule et en majuscule. On supposera que les conditions initiales des grandeurs temporelles sont nulles (sauf mention contraire), ce qui, sans nuire à la généralité du problème, rend plus commode l'écriture des transformées de Laplace et des diverses dérivées.

Modélisation thermique de la chambre climatique

L'utilisation de la PAC nécessite d'asservir son fonctionnement à la température désirée pour l'air contenu dans la chambre climatique. Il faut pour cela modéliser les transferts thermiques avec les éléments environnants :

- l'accès des machines à tester se fait par l'extérieur, il faut donc considérer les fuites thermiques vers le milieu extérieur à travers la porte d'accès ;
- les murs intérieurs de la chambre font aussi l'objet d'un chauffage même si ce n'est pas l'objectif du système ;
- enfin, le fluide caloporteur de la PAC communique à la chambre une quantité de chaleur dont le réglage, via la tension de commande du moteur de la PAC, fait l'objet de cette partie de l'étude.

La modélisation thermique de la chambre climatique fait intervenir les températures suivantes (Figure 22) :

- t_{Ch} température de l'air contenu dans la chambre climatique ;
- t_{Mu} température des murs intérieurs de la chambre ;
- t_{Fl} température du fluide caloporteur du circuit de chauffage ;
- t_{Ext} température extérieure.

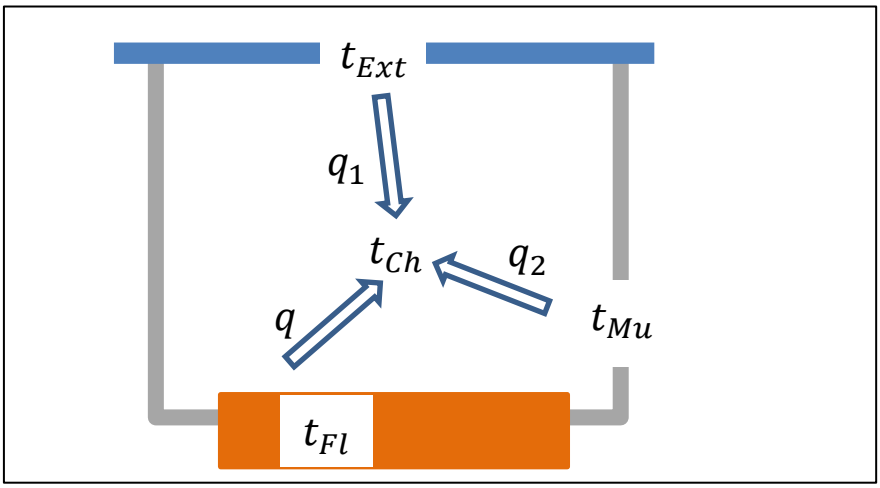


Figure 22 : *Schéma des échanges thermiques entre l'air de la chambre et les murs intérieurs (en gris), le mur extérieur (en bleu) et le fluide caloporteur en provenance de la PAC (en marron)*

Les échanges de chaleur entre l'air contenu dans la chambre, les murs, le fluide caloporteur venant de la PAC et l'extérieur sont décrits à l'aide des constantes suivantes :

- R_{ChExt} résistance thermique d'échange entre l'air de la chambre et l'extérieur ;
- R_{ChMu} résistance entre l'air de la chambre et les murs intérieurs ;
- R_{ChFl} résistance entre l'air de la chambre et le fluide caloporteur ;
- C_{Ch} capacité thermique de l'air dans la chambre climatique ;
- C_{Mu} capacité thermique des murs.

Les équations qui régissent l'évolution temporelle des températures rendent compte :

- de l'équilibre thermique de l'air dans la chambre :

$$C_{Ch}\frac{dt_{Ch}}{dt} = q_1 + q_2 + q \ ;$$

- de l'équilibre thermique des murs intérieurs :

$$C_{Mu}\frac{dt_{Mu}}{dt} = -q_2.$$

avec :

- q_1 le flux thermique reçu par la chambre en provenance de l'extérieur :

$$q_1 = \frac{t_{Ext}-t_{Ch}}{R_{ChExt}} \ ;$$

- q_2 le flux thermique reçu par la chambre en provenance des murs intérieurs :

$$q_2 = \frac{t_{Mu}-t_{Ch}}{R_{ChMu}} \ ;$$

- q le flux thermique reçu par la chambre en provenance du fluide caloporteur :

$$q = \frac{t_{Fl}-t_{Ch}}{R_{ChFl}} \ .$$

Afin de simplifier certaines écritures, les notations suivantes seront employées :

- $R_{ChEq} = \left(\frac{1}{R_{ChExt}} + \frac{1}{R_{ChMu}} + \frac{1}{R_{ChFl}}\right)^{-1}$ résistance thermique équivalente pour les échanges impliquant la chambre ;
- ρ_{Ext}, ρ_{Mu} et ρ_{Fl} ratios de résistances tels que $\rho_{Ext} = \frac{R_{ChEq}}{R_{ChExt}}$, $\rho_{Mu} = \frac{R_{ChEq}}{R_{ChMu}}$ et $\rho_{Fl} = \frac{R_{ChEq}}{R_{ChFl}}$ avec $\rho_{Ext} + \rho_{Mu} + \rho_{Mu} = 1$;
- $\tau_{Ch} = R_{ChEq}C_{Ch}$, temps caractéristique des phénomènes thermiques associés à la chambre ;
- $\tau_{Mu} = R_{ChMu}C_{Mu}$, temps caractéristique des phénomènes thermiques associés aux murs.

Question 38. Compléter le schéma-bloc représentatif du comportement thermique de la chambre sur le document réponse DR2.

Modélisation mécanique de l'ensemble {moteur + compresseur}

On souhaite maintenant préciser la relation entre la tension de consigne du moteur de la PAC et la chaleur qu'elle délivre par l'intermédiaire du fluide caloporteur. Le moteur entraînant le compresseur a pour tension d'entrée u_m, il délivre en sortie une vitesse de rotation ω. La fonction de transfert du moteur dans le domaine de Laplace est :

$$H_m(p) = \frac{\Omega(p)}{U_m(p)} .$$

La puissance thermique Q délivrée à la chambre climatique par l'intermédiaire du fluide caloporteur est proportionnelle à ω. La puissance unitaire P_{th} synthétise les influences de la cylindrée du compresseur, du débit du fluide caloporteur et de sa capacité thermique. On a :

$$Q(p) = P_{th}\, \Omega_m(p).$$

Le moteur qui entraîne l'arbre du compresseur est du type à aimant permanent sans balais (dit «*brushless*»). Son rendement est élevé ; en effet, les pertes intérieures au moteur sont diminuées grâce à l'absence de balais, seules les pertes par effet Joule dans les enroulements sont considérées ici. On admettra que l'autopilotage du moteur *brushless* conduit du point de vue comportemental à un modèle équivalent à celui d'une machine à courant continu. Les équations du modèle équivalent sont rappelées ci-dessous où u_m et i_m représentent les grandeurs électriques ; L, R, K_E et K_T sont les paramètres du moteur. On note :

- J_{eq} le moment d'inertie de toutes les parties en mouvement ramené à l'arbre du moteur suivant son axe de rotation. On supposera que la variation de J_{eq} en fonction de l'angle de rotation de l'arbre est négligeable ;
- c_m le couple moteur exercé par le bobinage du stator sur le rotor ; c_r le couple résistant exercé par le fluide frigorigène sur le rotor consécutivement à sa compression et aux pertes de charge à l'orifice d'évacuation, supposé proportionnel à ω selon la relation $c_r = f_{res} \cdot \omega$;
- u_m la tension aux bornes du moteur, i_m l'intensité du courant induit, e la force contre-électromotrice ;
- K_E le coefficient de force contre-électromotrice, K_T le coefficient de couple ;
- L et R respectivement l'inductance et la résistance d'induit.

On admet les équations temporelles du modèle suivantes :

$$c_m - c_r = J_{eq} \cdot \frac{d\omega}{dt} ;$$
$$c_m = K_T \cdot i_m ;$$
$$e = K_E \cdot \omega ;$$
$$u_m = e + R \cdot i_m + L \cdot \frac{di_m}{dt} .$$

Question 39. Compléter le schéma-bloc représentatif du comportement électromécanique du moteur sur le document réponse DR3.

Question 40. Exprimer la fonction de transfert H_m dans le domaine de Laplace sous la forme canonique :

$$H_m(p) = \frac{\Omega(p)}{U_m(p)} = \frac{k_m}{1+(\tau_m+\alpha\tau_e)p+\tau_m\tau_e p^2} ,$$

avec $\tau_e = \frac{L}{R}$ et $\tau_m = \frac{RJ_{eq}}{K_E K_T + Rf}$.

Donner les expressions de k_m et α.

Question 41. Montrer que si on considère $R \cdot i_m$ négligeable devant e, α peut être considéré comme petit devant 1 (on se placera en régime permanent).

Question 42. Donner une approximation des valeurs numériques de k_m, α, τ_m et τ_e. Comparer $(\tau_m + \alpha\tau_e)$ et $(\tau_m + \tau_e)$.

Question 43. Déduire des trois questions précédentes que H_m peut être approchée par :

$$H_m(p) = \frac{\Omega(p)}{U_m(p)} = \frac{k_m}{(1+\tau_m p)(1+\tau_e p)} .$$

Modélisation électro-mécano-thermique de l'ensemble {chambre+moteur+compresseur}

Les blocs représentant les comportements individuels de la chambre et de l'ensemble {moteur + compresseur} étant connus, l'objectif est maintenant de caractériser la réponse de l'ensemble complet à un signal de commande ou à une perturbation associée à des variations de la température extérieure.

Question 44. Établir, dans le domaine de Laplace, les fonctions de transfert liant les deux entrées $U_m(p)$ et $T_{Ext}(p)$ à $T_{Ch}(p)$. Le résultat sera mis sous la forme suivante :

$$T_{Ch}(p) = H_1(p).U_m(p) + H_2(p).T_{\mathrm{Ext}}(p),$$

où $H_1(p)$ désigne la fonction de transfert de réglage et $H_2(p)$ la fonction de transfert de perturbation. Simplifier le résultat en considérant $\frac{\rho_{Mu}}{\rho_{Ext}} \ll 1$.

Question 45. Calculer les valeurs numériques des temps caractéristiques associés à $H_1(p)$.

Question 46. En déduire que $H_1(p)$ peut être réduite à la fonction de transfert du pôle dominant pour des applications sur des durées de quelques dizaines à quelques milliers de secondes.

Question 47. Le schéma-bloc du système simplifié non-asservi est représenté sur la Figure 23. Donner les expressions de $\tau_1$et K_1.

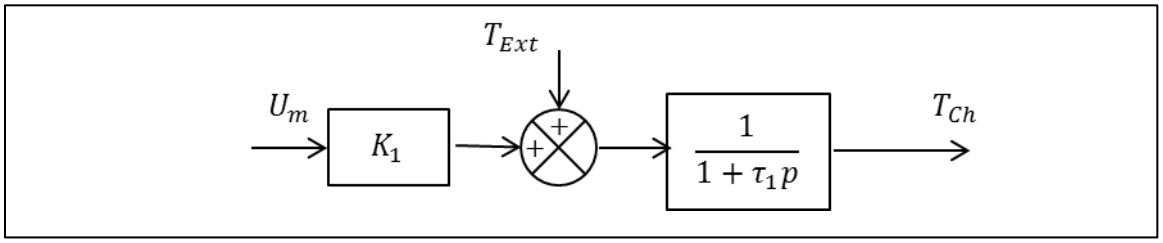


Figure 23 : *Schéma-bloc du système simplifié non-asservi*

6.3 Commande avec mesure de la température par un thermomètre

Objectif

Le modèle simplifié du comportement du système étant construit, il s'agit maintenant de l'asservir de manière à atteindre les performances souhaitées en réponse à une consigne indicielle puis en maintien de la température de la chambre malgré des perturbations causées par des variations de température extérieure.

Modèles de mesure et de correction

Le schéma-bloc de l'asservissement réalisé est donné sur la Figure 24.

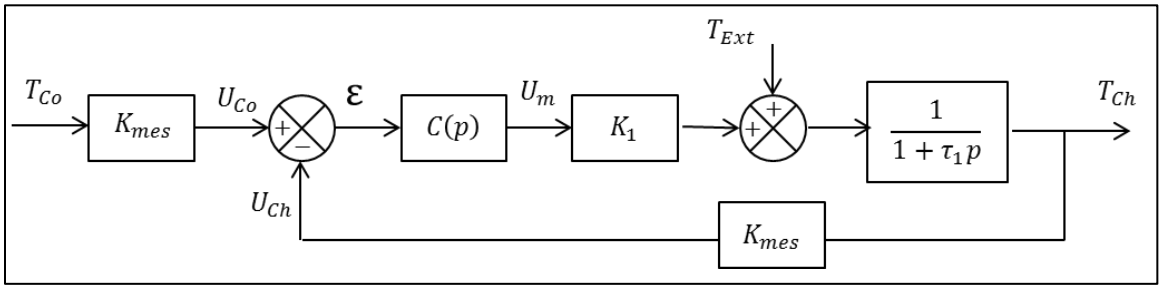


Figure 24 : *Schéma-bloc du système simplifié asservi*

On reconnaît les blocs du système non-asservi pour lesquels on prendra les valeurs numériques suivantes :

$$K_1 = 20°C \text{ et } \tau_1 = 390\ s.$$

On leur a ajouté une boucle d'asservissement. Le but est de contrôler la température t_{Ch}. Pour cela la température t_{Ch} de la chambre climatique est mesurée par un capteur placé loin du condenseur, à un endroit où il est intéressant pour l'expérience de réguler la température (par exemple dans l'habitacle du véhicule testé ou dans son compartiment moteur). Le capteur est constitué d'un thermomètre à résistance qui délivre une tension u_{Ch} proportionnelle à T_{Ch} :

$$u_{Ch}(t) = K_{mes}\, t_{Ch}(t), \text{ avec } K_{mes} = 0{,}10\ V/°C.$$

La température de consigne T_{Co} est appliquée au système par l'intermédiaire de la tension u_{Co}, telle que :

$$u_{Co}(t) = K_{mes} t_{Co}(t).$$

Un correcteur à action proportionnelle et intégrale est ajouté en amont du moteur. Sa fonction de transfert $C(p)$ est telle que :

$$C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{\tau_i p}\right).$$

Question 48. Établir la fonction de transfert dans le domaine de Laplace entre la température $T_{Ch}(p)$ de la chambre climatique, la consigne $T_{Co}(p)$ et la température extérieure $T_{Ext}(p)$. Le résultat sera mis sous la forme suivante :

$$T_{Ch}(p) = H_{pour}(p).T_{Co}(p) + H_{reg}(p).T_{Ext}(p),$$

où $H_{pour}(p)$ et $H_{reg}(p)$ désignent respectivement les fonctions de transfert en poursuite et en régulation du système. Chacune sera exprimée en fonction des paramètres du correcteur et du système tels que définis sur la Figure 24.

Question 49. Préciser l'intérêt d'avoir des gains identiques pour convertir en tensions t_{Ch} et t_{Co}.

Question 50. Quelle serait la conséquence d'une absence de correcteur (c'est-à-dire avec $C(p) = 1$) ?

6.3.1 Étude en poursuite

En poursuite, le système doit obéir à une consigne imposée. Pour cette partie de l'étude on suppose que t_{Ext} est constante et nulle. L'objectif est de dimensionner le correcteur pour avoir un temps de réponse donné. On caractérisera ensuite le comportement du système en régime permanent.

Question 51. Afin de faciliter le réglage de l'asservissement, on cherche à rendre son comportement aussi proche que possible de celui de systèmes connus. Choisir le temps caractéristique du correcteur τ_i pour que le système soit du 1er ordre.

Désormais, on note $\boldsymbol{\tau_2 = \frac{\tau_i}{K_1 \cdot K_i \cdot K_{mes}}}$ la constante de temps associée à $\boldsymbol{H_{pour}(p)}$.

Question 52. Calculer K_i pour que le temps de réponse à 5% à une consigne de type échelon de température soit égal à $\tau_{ind} = 130\ s$.

Question 53. Exprimer la fonction de transfert donnant la tension de commande du moteur $u_m(p)$ en fonction de la consigne en température $T_{Co}(p)$.

Si la consigne en température est trop importante, la tension de commande va saturer, ce que l'on cherche à éviter. Pour étudier ce mécanisme de saturation, on impose ici une consigne $t_{Co}(t)$ constante.

Question 54. Démontrer que la tension $u_m(t)$ est maximale pour $t = 0^+$.

Question 55. Déterminer la valeur maximale de température de consigne à la limite de saturation de la tension de commande sachant que la saturation intervient pour $u_m(0^+) = 4{,}5\ V$.

Question 56. Que se passe-t-il si on impose une consigne de température supérieure à cette valeur ?

La consigne de température et la température extérieure sont, pour la question suivante, supposées constantes avec $t_{Co} = 20°C$ et $t_{Ext} = -4°C$.

Question 57. Déterminer les valeurs de $u_m(t)$ et $T_{Ch}(t)$ à l'issue du régime transitoire.

6.3.2 Étude en régulation

En régulation, le système doit compenser des variations de température extérieure. Pour cette partie de l'étude, la consigne de température est maintenue constante égale à t_{Co}. L'objectif est que, lors d'essais de longue durée, le système soit capable de maintenir une température dont les variations sont d'amplitude limitée. La température extérieure oscille autour de $\overline{t_{Ext}}$ avec une amplitude de variation Δt_{Ext} pendant la durée τ_{osc} selon une loi sinusoïdale :

$$t_{Ext}(t) = \overline{t_{ext}} + \Delta t_{Ext} \sin(\omega t) \text{ avec } = \frac{2\pi}{\tau_{osc}}\ .$$

Le but est de caractériser l'évolution de la température de la chambre climatique $t_{Ch}(t)$ lorsque le régime permanent est atteint.

Question 58. Montrer que, à l'issue du choix des paramètres du correcteur, la fonction de transfert en régulation du système s'écrit sous la forme :

$$H_{reg}(p) = \frac{\tau_2 p}{(1+\tau_2 p)(1+\tau_i p)}\ .$$

Question 59. L'évolution temporelle de la température de la chambre climatique est mise sous la forme suivante :

$$t_{Ch}(t) = \overline{t_{Ch}} + \Delta t_{Ch} \sin(\omega t + \varphi).$$

Donner l'expression de $\overline{T_{Ch}}$, ΔT_{Ch} et φ en fonction de T_{Co}, $\overline{T_{Ext}}$, ΔT_{Ext}, τ_2, τ_i et ω.

Question 60. Construire sur le document réponse DR4 le diagramme asymptotique de Bode en boucle fermée, en gain et en phase, correspondant à l'asservissement en régulation.

Question 61. Représenter sur le diagramme de Bode la gamme des périodes de perturbations qui conduirait aux gains de ΔT_{Ch} les plus défavorables pour la régulation. Donner un ordre de grandeur numérique de ΔT_{Ch} (en pourcentage de ΔT_{Ext}).

Question 62. Pour une périodicité des variations de la température extérieure correspondant aux cycles nuit-jour, donner un ordre de grandeur numérique de ΔT_{Ch} (en pourcentage de ΔT_{Ext}).

Question 63. Conclure sur l'amplitude ΔT_{Ch} des variations de température dans la chambre et sur l'efficacité de la régulation effectuée par le système.

Question 64. Estimer la marge de phase. Conclure sur la stabilité du système régulé.

Valeurs numériques

Etude cinématique d'un compresseur Scroll	
$\overrightarrow{OA} = a \cdot \overrightarrow{z_1}$	$a = 340\ mm$
$\overrightarrow{AC} = R_{orb} \cdot \overrightarrow{x_1} + d \cdot \overrightarrow{z_1}$	$R_{orb} = 8\ mm$ $d = 80\ mm$
$\omega = \dot{\theta}$	$\omega = \dot{\theta} = 3600\ tr/min$
$\overrightarrow{CG} = h_G \cdot \overrightarrow{z_1}$	$h_G = 50\ mm$
$\overrightarrow{CK} = x_K \cdot \overrightarrow{x_0} + h_K \cdot \overrightarrow{z_0}$	$x_K = 4\ mm$ $h_K = 100\ mm$
Etude en régime quasi-statique	
m	$m = 6\ kg$
R_{int}	$R_{int} = 60\ mm$
R_{ext}	$R_{ext} = 110\ mm$
p_{surf}	$p_{surf} = 6\ bar$
f	$f = 0{,}2$
F_A	$F_A = 3000\ N$
F_T	$F_T = 17000\ N$
P_{ext}	$P_{ext} = 1\ bar$
P_{cent}	$P_{cent} = 9\ bar$
R_g	$R_g = 3\ mm$
H_{spi}	$H_{spi} = 50\ mm$
R_{man}	$R_{man} = 30\ mm$
h_{man}	$h_{man} = 60\ mm$
p_{mat}	$p_{mat} = 30\ MPa$
Choix de motorisation	
m_c	$m_c = 7\ kg$
J_V	$J_V = 500\ kg.cm^2$

Caractéristiques thermiques de la chambre climatique	
R_{ChExt}	$R_{ChExt} = 0{,}001°C/W$
R_{ChMu}	$R_{ChMu} = 0{,}010°C/W$
R_{ChFl}	$R_{ChFl} = 0{,}005°C/W$
C_{Ch}	$C_{Ch} = 39 \cdot 10^4 J/°C$
C_{Mu}	$C_{Mu} = 10^5 J/°C$
P_{th}	$P_{th} = 36\ kW$
K_{mes}	$K_{mes} = 0{,}10\ V/°C$
Caractéristiques de la motorisation d'entraînement du compresseur	
L	$L = 1\ mH$
R	$R = 1\ \Omega$
K_E	$K_E = 1{,}5\ V/\left(rad/_s\right)$
K_T	$K_T = 1{,}5\ N.m/A$
J_{eq}	$J_{eq} = 0{,}05\ kg.m^2$
f_{res}	$f_{res} = 0{,}25\ N.m/\left(rad/_s\right)$
Caractéristiques du modèle simplifié d'ordre 1	
K_1	$K_1 = 20°C$
τ_1	$\tau_1 = 390\ s$
τ_{ind}	$\tau_{ind} = 130\ s$

- Fin du sujet -

Annexe

- Annexe 1 – Question 28

Moteurs à courant continu

LSK 1324 VL - LSK 1324C VL

Caractéristiques électriques

E4 - Tables de sélection (IC 06)

Les caractéristiques électriques sont données pour :
- alimentation en triphasé pont complet
- degré de protection IP 23S
- mode de refroidissement IC 06 (V.F.)
- service continu S1
- température ambiante ≤ 40°C

Masse totale : 215 kg
Moment d'inertie : [illegible] kg.m²
Puissance d'excitation : 0,85 kW

154 - 189 N.m

P	Vitesse de rotation n pour tension d'induit U							M	I	η	L	$R_{115°}$	U_{max}		
	260 V	400 V	420 V	440 V	460 V	500 V	600 V			Hors excit.				Indice	Délai
kW	min^{-1}	min^{-1}	min^{-1}	min^{-1}	min^{-1}	min^{-1}	min^{-1}	N.m	A		mH	Ω	V		
12.7	700							173	67	0.73	[illegible]	[illegible]			
21.4		1070						191	66	0.81	[illegible]	[illegible]			
22.7			1120					194	65	0.83	[illegible]	[illegible]		08	✶
24.2				1170				198	65	0.84	[illegible]	[illegible]			
24.9					1220			195	64.5	0.84	[illegible]	[illegible]			
26.9						1320		195	64	0.84	[illegible]	[illegible]			
32.1							1580	194	63	0.85	[illegible]	[illegible]		▼	
16.8	910							176	80	0.80	[illegible]	[illegible]	460		
27.3		1390						188	79.5	0.86	[illegible]	[illegible]	460		
28.8			1460					188	79	0.87	[illegible]	[illegible]	460	09	✶
30.2				1530				189	79	0.87	[illegible]	[illegible]	460		
30.5					1600			182	76.5	0.87	[illegible]	[illegible]	460		
33						1730		182	75	0.88	[illegible]	[illegible]	500	▼	
23.5	1240							181	105.5	0.85	[illegible]	[illegible]	550		
36.8		1910						184	105	0.87	[illegible]	[illegible]	550		
38.8			2000					185	104.5	0.88	[illegible]	[illegible]	550	10	✶✶
40.5				2100				184	104.5	0.88	[illegible]	[illegible]	550		
41.8					2190			182	101.5	0.89	[illegible]	[illegible]	550		
44						2380		177	99	0.89	[illegible]	[illegible]	550		
51.5							2860	172	96.5	0.89	[illegible]	[illegible]	600	▼	
28.1	1500							179	127	0.85	[illegible]	[illegible]	550		
44.7		2300						186	126.5	0.88	[illegible]	[illegible]	550		
46.6			2420					184	126	0.88	[illegible]	[illegible]	550	11	✶✶✶
49				2530				185	126	0.88	[illegible]	[illegible]	550		
49.5					2640			179	121	0.89	[illegible]	[illegible]	550		
52.7						2870		175	116	0.89	[illegible]	[illegible]	550		
61.4							3450	170	111.5	0.89	[illegible]	[illegible]	600	▼	✶✶
30.6	1830							160	135.5	0.87	[illegible]	[illegible]	460		
48		2820						163	134	0.89	[illegible]	[illegible]	460		
49.8			2960					161	133	0.89	[illegible]	[illegible]	460	13	✶✶
52.5				3100				179	132	0.90	[illegible]	[illegible]	460		
53.2					3240			175	128.5	0.90	[illegible]	[illegible]	460		
56.7						3520		170	126	0.90	[illegible]	[illegible]	500	▼	

*: de plus grandes plages de vitesse par désexcitation peuvent être étudiées en fonction de l'application : nous consulter.
▼: moteur en version compensé uniquement : LSK 1324C VL.

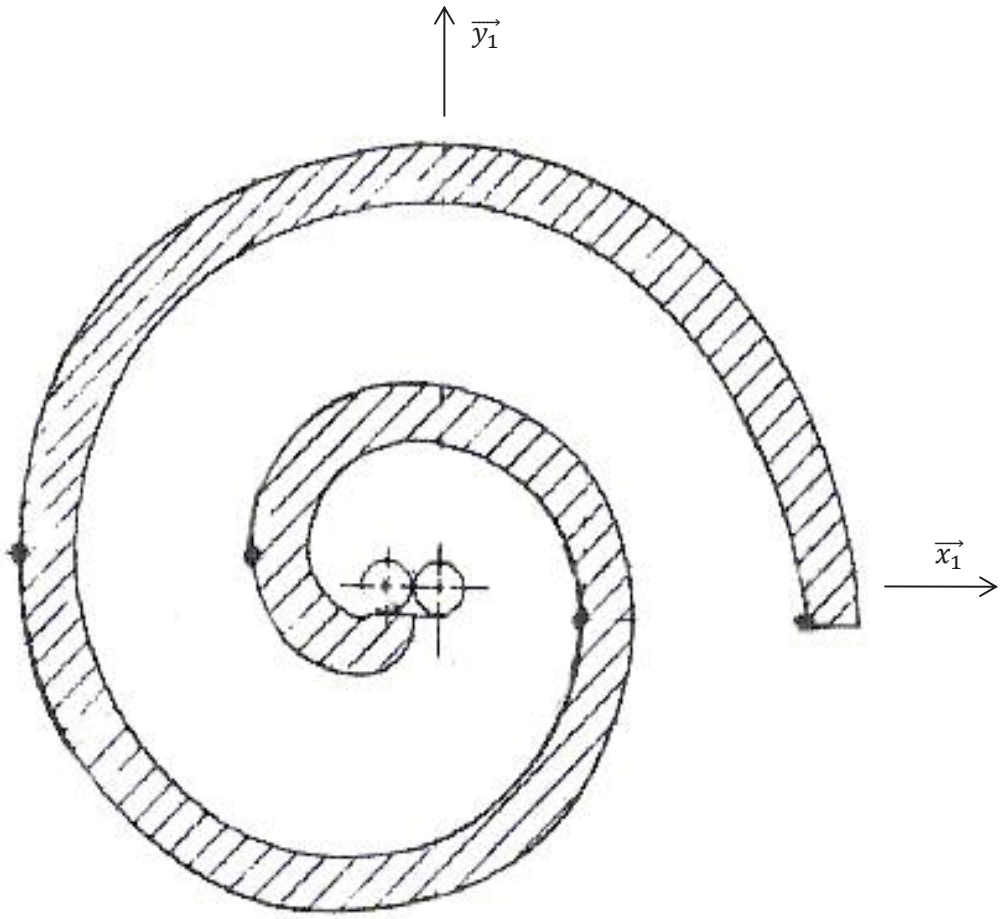
P : Puissance nominale
M : Moment nominal
I : Intensité admissible en régime permanent
R : Résistance de l'induit à 115 °C
U_{max} : Tension d'induit maximale
N. C. : Moteur non compensé
C : Moteur compensé

LEROY SOMER

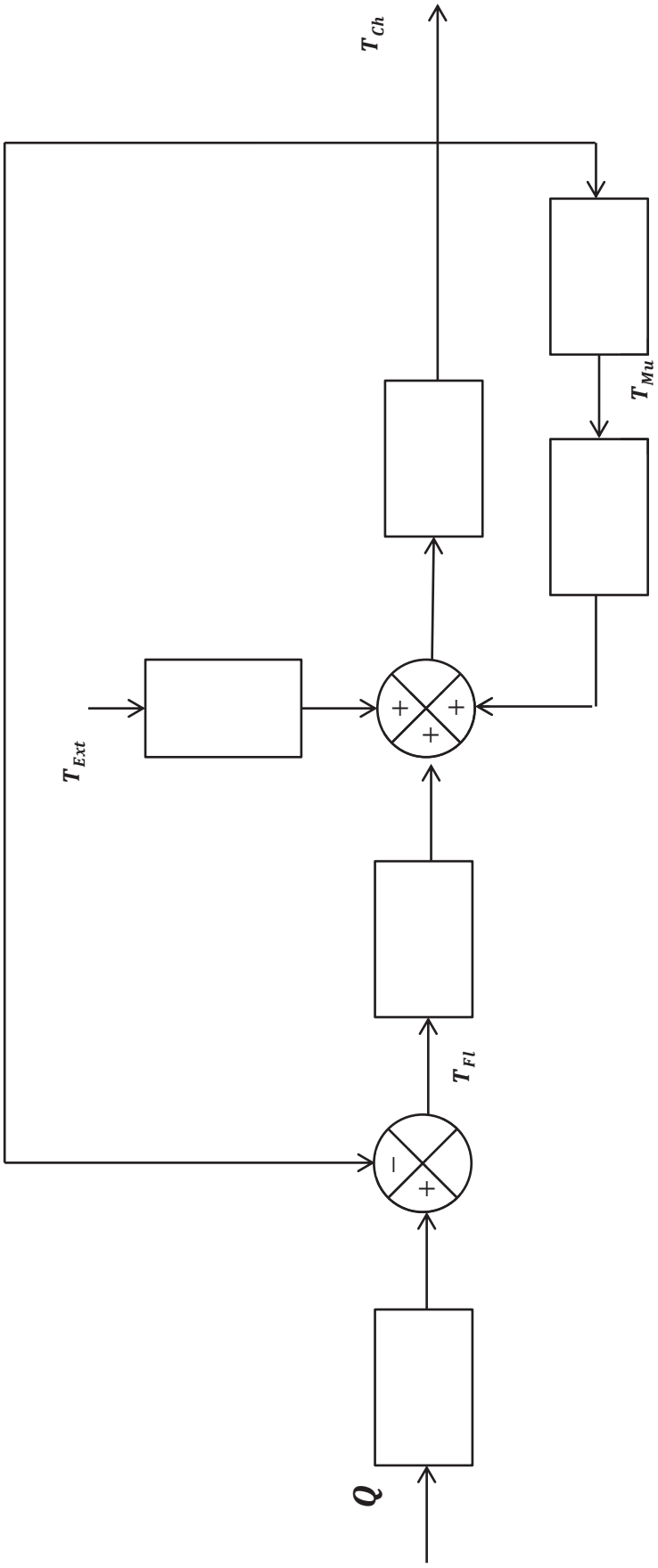
N.B. : Certaines données ont été masquées intentionnellement.

Documents réponse

- DR 1 – Question 14

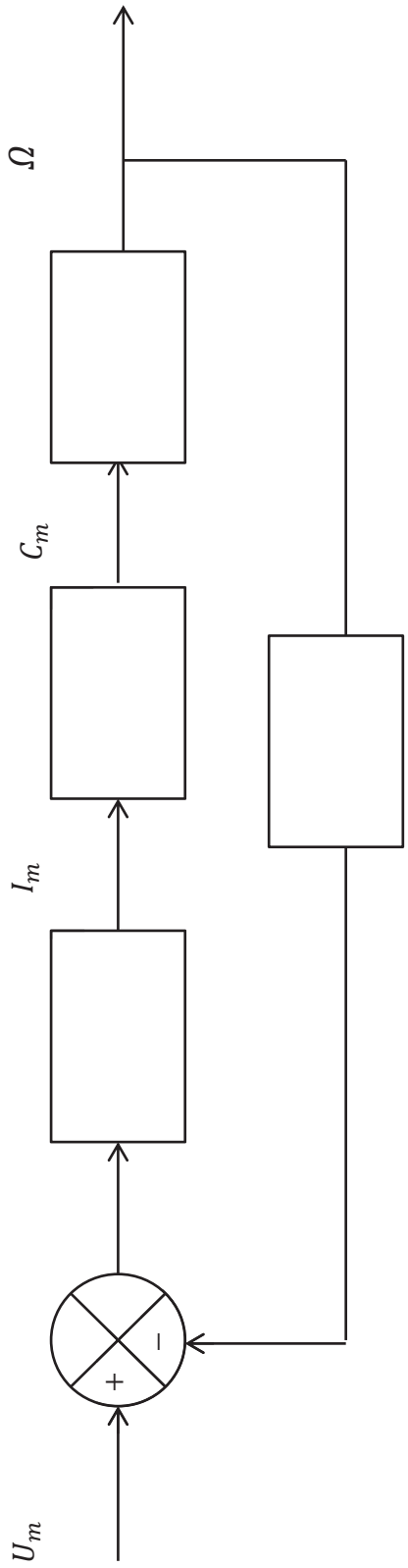


- DR 2 – Question 38



Document réponse 2

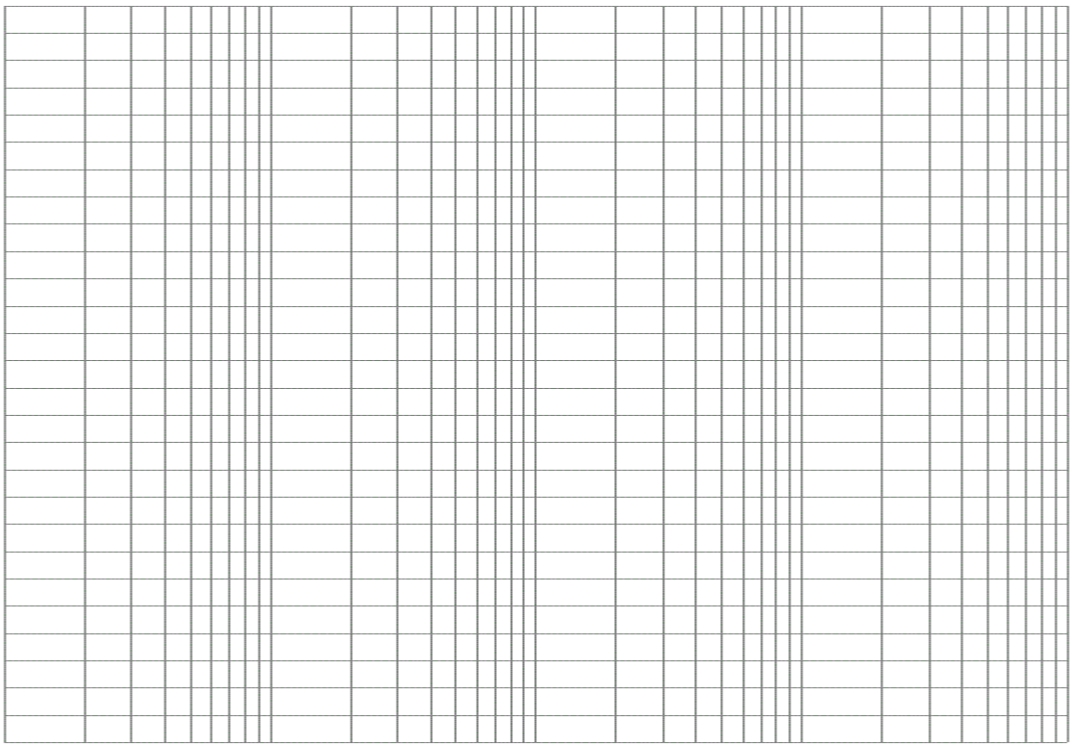
- DR 3 – Question 39



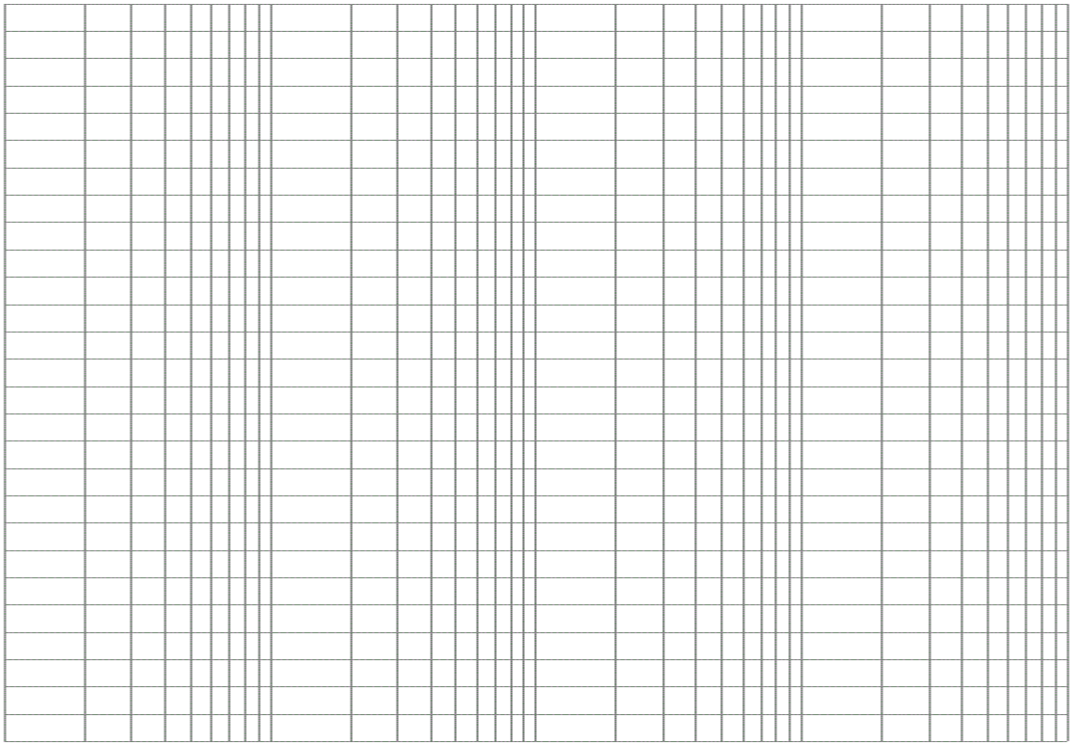
Document réponse 3

- DR 4 – Questions 60 et 61

Gain



Phase



Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Cinématique des mécanismes : composition des mouvements, contact ponctuel, lois entrée-sortie et fermetures
- Chaînes de solides : liaisons équivalentes, mobilité et hyperstatisme
- Modélisation des liaisons, graphe des liaisons et schéma cinématique
- Dynamique des systèmes de solides : principe fondamental, stratégie d'isolement, équilibrage
- Modélisation des actions mécaniques : modèles local et global, frottement, torseurs des liaisons
- Cinétique : torseurs cinétique et dynamique, énergie cinétique, inertie équivalente
- Énergétique : puissances, théorème de l'énergie cinétique, rendement
- Géométrie des masses : centre d'inertie, matrice d'inertie, théorème de Huygens

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/x-ens/psi